

# Mecânica Geométrica

## Ficha 4

A entregar até à aula de quarta-feira dia 16 de outubro

1. Seja  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita  $\tilde{\nabla}$ , e seja  $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . Sejam  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$  extensões locais de  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ .

- (a) Mostre que

$$\nabla_X Y = \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)^\top,$$

onde  $^\top : TM|_N \rightarrow TN$  é a projeção ortogonal. (**Sugestão:** Use a fórmula de Koszul).

- (b) A **segunda forma fundamental** de  $N$  é a aplicação  $B : T_p N \times T_p N \rightarrow (T_p N)^\perp$  definida em cada ponto  $p \in N$  por

$$B(X_p, Y_p) := \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)_p - (\nabla_X Y)_p = \left( \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)_p^\perp.$$

Mostre que  $B$  está bem definida, é bilinear e simétrica.

2. O **pêndulo esférico** de comprimento  $l$  é o sistema mecânico definido por uma partícula de massa  $m > 0$  movendo-se em  $\mathbb{R}^3$  sob a ação de uma aceleração gravitacional constante  $g$  e sujeita à restrição holónoma

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = l^2\}$$

(assumindo uma força de reação perfeita).

- (a) Escreva as equações do movimento do pêndulo esférico em coordenadas esféricas.  
(b) Que paralelos de  $N$  são (imagens de) movimentos do sistema?