Mecânica Geométrica

Ficha 3

A entregar até à aula de quarta-feira dia 9 de outubro

1. Seja $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇, e seja
$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = e^{2\rho}\langle\cdot,\cdot\rangle$$
uma métrica conforme a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, onde $\rho \in C^\infty(M)$. Mostre que a conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ de $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é dada por
$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y\rangle \operatorname{grad}\rho$$
para todo o $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\operatorname{grad}\rho$ é o campo vetorial definido por
$$\langle \operatorname{grad}\rho, X\rangle = d\rho(X)$$
para todo o $X \in \mathfrak{X}(M)$. (**Sugestão:** Use a fórmula de Koszul).

2. Seja $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana. A curva $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ diz-se uma **geodésica reparametrizada** se $c(t) = \gamma(s(t))$ para todo o $t \in I$, onde $\gamma : J \subset \mathbb{R} \to M$ é uma geodésica e $s : I \to J$ é um difeomorfismo. Mostre que c é uma geodésica reparametrizada se e só se satisfaz
$$\frac{D\dot{c}}{dt} = f(t)\,\dot{c}$$
para alguma função diferenciável $f : I \to \mathbb{R}$.

3. O **plano hiperbólico** é o semiplano superior
$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$$
com a métrica Riemanniana
$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \frac{1}{y^2}\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right).$$
   (a) Use a expressão da equação de Newton em coordenadas locais para escrever as equações das geodésicas, e aproveite para obter os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita de $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nas coordenadas (x, y).

   (b) Mostre que as semiretas verticais e as semicircunferências centradas no eixo dos xx são imagens de geodésicas. (**Sugestão:** Use a questão 2).