Mecânica Geométrica

Ficha 2

A entregar até à aula de quarta-feira dia 2 de outubro

1. Considere as coordenadas locais usuais (θ, φ) na esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, definidas pela parameterização $\phi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

   (a) Mostre que a métrica Riemanniana g induzida em S^2 pela métrica Euclidean usual em $\mathbb{R}^3$ é dada nestas coordenadas por

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi.$$

   (b) Determine os símbolos de Christoffel para a conexão de Levi-Civita associados a estas coordenadas locais.

   (c) Mostre que o equador $\theta = \frac{\pi}{2}$ é imagem de uma geodésica. Serão os parelelos $\theta = \theta_0$ (com $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$) imagens de geodésicas?

   (d) Seja $c : [0, 2\pi] \to S^2$ a curva dada em coordenadas locais por $(\theta(t), \varphi(t)) = (\theta_0, t)$, onde $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Seja V um campo vetorial paralelo ao longo de c tal que $V(0) = \frac{\partial}{\partial\theta}$. Calcule o ângulo pelo qual V rodou quando regressa ao ponto $c(2\pi) = c(0)$, ou seja, o ângulo entre $V(0)$ e $V(2\pi)$.

   (**Nota:** Este é precisamente o ângulo pelo qual o plano de oscilação de um pêndulo de Foulcaut – ou seja, um pêndulo suficientemente comprido e pesado para se manter a oscilar durante dias – roda ao fim de 24 horas à latitude $\frac{\pi}{2} - \theta_0$; a razão para isto é que o plano de oscilação do pêndulo tenta permanecer fixo em relação às estrelas distantes à medida que a Terra roda sobre o seu eixo).

   (e) Indique um triângulo geodésico (ou seja, um triângulo cujos lados são imagens de geodésicas) com 3 ângulos retos. Sem resolver qualquer equação diferencial, calcule o ângulo pelo qual um vetor roda quando é transportado paralelamente uma vez em torno do triângulo.