Mecânica Geométrica

Ficha 9

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 17 de Novembro

1. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana, $\alpha \in \Omega^1(M)$ uma forma-1 e $U \in C^\infty(M)$ uma função diferenciável.

   (a) Mostre que as equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano $L : TM \to \mathbb{R}$ dado por
   $$L(v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle + \iota(v)\alpha_p - U(p)$$
   para $v \in T_pM$ determinam os movimentos do sistema mecânico $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$, onde
   $$\mathcal{F}(v) = -(dU)_p - \iota(v)(d\alpha)_p$$
   para $v \in T_pM$.

   (b) Mostre que a energia mecânica $E = K + U$ é conservada ao longo dos movimentos de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$ (que se diz então um **sistema mecânico conservativo com termo magnético**).

   (c) Mostre que L é hiper-regular e calcule a transformação de Legendre.

   (d) Determine o Hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ e escreva as equações de Hamilton.

   (e) Mostre que $\tilde{\omega} = \omega + \pi^* d\alpha$ é uma forma simpléctica em T^*M, onde ω é a forma simpléctica canónica e $\pi : T^*M \to M$ é a projecção natural ($\tilde{\omega}$ diz-se uma **forma simpléctica canónica com termo magnético**).

   (f) Mostre que o fluxo Hamiltoniano gerado pela função $\tilde{H} \in C^\infty(T^*M)$ em relação à forma simpléctica $\tilde{\omega}$ é dado pelas equações
   $$\begin{cases} \dot{x}^i = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} \\ \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial x^i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) \dot{x}^j \end{cases}$$

   (g) A aplicação $F : T^*M \to T^*M$ dada por
   $$F(\xi) = \xi - \alpha_p$$
   para $\xi \in T_p^*M$ é um difeomorfismo que preserva fibras. Mostre que F leva o fluxo Hamiltoniano de H em relação à forma simpléctica canónica ω no fluxo Hamiltoniano de $\tilde{H}$ em relação à forma simpléctica $\tilde{\omega}$, onde
   $$\tilde{H}(\xi) = \frac{1}{2}\langle \xi, \xi \rangle + U(p)$$
   para $\xi \in T_p^*M$. (**Nota:** *Uma vez que as projecções dos dois fluxos em M coincidem, vemos que o termo magnético na força exterior pode ser introduzido mudando o Lagrangeano ou a forma simpléctica*).