Mecânica Geométrica

Ficha 8

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 10 de Novembro

1. Considere duas partículas, de massas normalizadas $\mu \in]0,1[$ e $1-\mu$, em órbita circular em torno uma da outra. Identificamos o plano da órbita com $\mathbb{R}^2$ com o centro de massa na origem. As posições normalizadas das partículas no referencial em rotação uniforme no qual estão imóveis são dadas por $p_1 = (1-\mu, 0)$ e $p_2 = (-\mu, 0)$. O movimento de uma terceira partícula com massa desprezável neste referencial (**problema restrito dos 3 corpos**) é determinado pelo Lagrangeano $L : T\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}\right) \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(x, y, v^x, v^y) = \frac{1}{2}\left((v^x)^2 + (v^y)^2\right) + xv^y - yv^x + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2},$$

onde $r_1, r_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são as distâncias Euclidianas a p_1, p_2.

   (a) Escreva as equações do movimento.

   (b) Determine os pontos de equilíbrio que não estão no eixo dos xx. (**Sugestão:** *Note que os pontos de equilíbrio são os pontos críticos de uma certa função, mostre que* $x^2 + y^2 = \mu {r_1}^2 + (1-\mu){r_2}^2 - \mu(1-\mu)$, *e use* (r_1, r_2) *como coordenadas locais nos semiplanos* $y > 0$ *e* $y < 0$).

   (c) Obtenha a função Hamiltoniana.

   (d) Suponha que a partícula se encontra inicalmente em repouso na origem. Mostre que se $\mu \neq \frac{1}{2}$ ela não permanecerá na origem, mas também não passará pelos pontos de equilíbrio encontrados em (b).

2. Considere a acção de $SO(3)$ em si próprio por multiplicação à esquerda.

   (a) Mostre que a acção infinitesimal de $B \in \mathfrak{so}(3)$ é o campo invariante à **direita** determinado por B.

   (b) Use o Teorema de Noether para mostrar que o momento angular do pião de Euler é constante.