Mecânica Geométrica

Ficha 7

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 3 de Novembro

1. Seja M uma variedade diferencial de dimensão n e Σ uma distribuição de planos-m em M. Mostre que:

   (a) $d\omega(X,Y) = X \cdot (\omega(Y)) - Y \cdot (\omega(X)) - \omega([X,Y])$ para quaisquer $\omega \in \Omega^1(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

   (b) Se Σ é localmente dada por $\ker(\omega^1) \cap \ldots \cap \ker(\omega^{n-m})$ então Σ é integrável se e só se $d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-m} = 0$ para $i = 1, \ldots, n-m$.

2. Recorde que o nosso modelo para um patim é dado pela restrição não holónoma Σ definida em $\mathbb{R}^2 \times S^1$ pelo núcleo de $\omega = -\sin\theta dx + \cos\theta dy$.

   (a) Mostre que o patim pode aceder a todos os pontos do espaço de configurações: dados dois pontos $p, q \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ existe uma curva seccionalmente diferenciável $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ compatível com Σ tal que $c(0) = p$ e $c(1) = q$. Porque é que isto mostra que Σ é não integrável?

   (b) Assumindo que a energia cinética do patim é

   $$K = \frac{M}{2}\left((v^x)^2 + (v^y)^2\right) + \frac{I}{2}\left(v^\theta\right)^2$$

   e que a força de reacção é perfeita, mostre que o patim se move em círculos ou em linha recta com velocidade constante. Qual é a interpretação física da força de reacção?

   (c) Determine o movimento do patim num plano inclinado, i.e. sujeito a uma energia potencial $U = Mg\sin\alpha\, x$.