

Mecânica Geométrica

Ficha 5

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 20 de Outubro

1. Seja $S_n = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas, e $f : GL(n) \rightarrow S^n$ a aplicação $f(A) = A^t A$. Mostre que:
 - (a) A matriz identidade I é um valor regular de f , e portanto $O(n) = f^{-1}(I)$ é uma subvariedade de $GL(n)$;
 - (b) $\mathfrak{o}(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$;
 - (c) $\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$;
 - (d) $O(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$, e portanto é um grupo de Lie.
2. O semiplano superior $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ pode ser identificado com o grupo de Lie formado pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que a métrica do plano hiperbólico,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy),$$

é invariante à esquerda para esta estrutura de grupo de Lie.

3. Mostre que existe um isomorfismo linear $\Omega : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A\xi = \Omega(A) \times \xi$ para todo o $A \in \mathfrak{so}(3)$ e todo o $\xi \in \mathbb{R}^3$. Mostre ainda que $\Omega([A, B]) = \Omega(A) \times \Omega(B)$ (portanto (\mathbb{R}^3, \times) é uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$).