Mecânica Geométrica

Ficha 4

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 13 de Outubro

1. Seja $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$, e seja $N \subset M$ uma subvariedade com métrica induzida $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇. Mostre que:

   (a) Se $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ são extensões quaiquer de $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ (ou seja, $\widetilde{X}_p = X_p$ e $\widetilde{Y}_p = Y_p$ para todo o $p \in N$) então $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ é uma extensão de $[X, Y]$.

   (b) Se $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ então $\nabla_X Y = \left(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right)^{\top}$, onde $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ são extensões quaiquer de X, Y e ${}^{\top} : T_pM \to T_pN$ é o operador projecção ortogonal para cada $p \in N$.

   (c) A segunda forma fundamental $B(X, Y) = \left(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right)^{\perp}$, onde ${}^{\perp} : T_pM \to (T_pN)^{\perp}$ é o operador projecção ortogonal para cada $p \in N$, está bem definida (ou seja, não depende da escolha das extensões $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$).

   (d) $B(X, Y)_p$ só depende de X_p, Y_p, e a dependência é linear.

2. Um **pêndulo esférico** de comprimento l é uma partícula de massa $m > 0$ movendo-se em $\mathbb{R}^3$ sob a acção de uma aceleração gravitacional constante g e da restrição holónoma

   $$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = l^2\right\}$$

   (com uma força de reacção perfeita).

   (a) Escreva as equações do movimento do pêndulo esférico usando coordenadas esféricas.

   (b) Quais os paralelos de N que são possíveis (imagens de) trajectórias do sistema?