Mecânica Geométrica

Ficha 3

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 6 de Outubro

1. Seja $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇, e seja $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = e^{2\rho}\langle\cdot,\cdot\rangle$ uma métrica conforme a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (onde $\rho \in C^\infty(M)$). Mostre que a conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ de $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é dada por

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y\rangle \operatorname{grad}\rho$$

para todo o $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Mostre que uma $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ é uma geodésica reparametrizada da variedade Riemanniana $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se e só se satisfaz

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = f(t)\,\dot{c}$$

para alguma função diferenciável $f : I \to \mathbb{R}$.

3. O **plano hiperbólico** é o semiplano superior

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$$

com a métrica Riemanniana

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \frac{1}{y^2}\,(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

   (a) Calcule os símbolos de Christoffel para a conexão de Levi-Civita de $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nas coordenadas (x, y).

   (b) Use o teorema da conservação da energia mecânica mostrar que as (imagens das) geodésicas do plano hiperbólico são semi-rectas verticais ou semi-circunferências de centro no eixo dos xx.

   (c) Considere agora a métrica Euclidiana em H. Determine uma função energia potencial $U : H \to \mathbb{R}^2$ tal que os movimentos de uma partícula com energia mecânica nula sejam, a menos de reparametrização, as geodésicas do plano hiperbólico.