Mecânica Geométrica

Ficha 2

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 29 de Setembro

1. Considere os campos vectoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

   (a) Calcule $[X, Y]$.

   (b) Determine os fluxos de X e Y e mostre que comutam.

2. Considere as coordenada locais (θ, φ) usuais na esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, definidas pela parametrização $\phi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

   (a) Determine a expressão nestas coordenadas da métrica redonda (ou seja, a métrica Riemanniana induzida em S^2 pela métrica Euclidiana usual em $\mathbb{R}^3$).

   (b) Calcule os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita associados a estas coordenadas locais.

   (c) Mostre que as (imagens das) geodésicas são os círculos máximos (**Sugestão:** *Comece por mostrar que o equador $\theta = \frac{\pi}{2}$ é imagem de uma geodésica*).

   (d) Seja $c : [0, 2\pi] \to S^2$ dado por $(\theta, \varphi) = (\theta_0, t)$, onde $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (portanto c não é uma geodésica). Seja V um campo vectorial paralelo ao longo de c tal que $V(0) = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Calcule o ângulo pelo qual V é rodado quando regressa ao ponto inicial. (**Nota:** *O ângulo que calculou é exactamente o ângulo pelo qual o plano de oscilação do Pêndulo de Foulcaut - i.e., um pêndulo suficientemente comprido e pesado para oscilar durante dias - roda ao longo de um dia num local à latitude $\frac{\pi}{2} - \theta_0$; a razão para isto é que o plano de oscilação do pêndulo tenta permanecer fixo em relação às estrelas distantes à medida que a Terra roda sobre o seu eixo*).