Mecânica Geométrica

Ficha 10

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 24 de Novembro

1. Mostre que o fluxo definido pelas equações de Euler $\dot{P} = P \times \Omega$ numa esfera $\|P\|^2 = \|p\|^2$ é o fluxo Hamiltoniano gerado pela função energia cinética $K = \frac{1}{2}\langle P, \Omega \rangle$ em relação à forma simpléctica ω definida na esfera por

$$\omega(U, V) = \frac{1}{\|p\|^2} \langle P, U \times V \rangle.$$

2. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana compacta. Mostre que para qualquer aberto $U \subset M$ e qualquer $T > 0$ existem geodésicas $c : \mathbb{R} \to M$ com $\|\dot{c}(t)\| = 1$ tais que $c(0) \in U$ and $c(t) \in U$ para algum $t \geq T$.

3. Sejam $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ as coordenadas locais usuais em T^*M. Calcule X_{x^i}, X_{p_i}, $\{x^i, x^j\}$, $\{p_i, p_j\}$ e $\{p_i, x^j\}$ para $i, j = 1, \ldots, n$.

4. Moste que o parêntesis de Poisson satisfaz a **regra de Leibniz**

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$$

para quaisquer $F, G, H \in C^\infty(T^*M)$.