2º Exame de Mecânica Geométrica

5 de Fevereiro de 2011 – 15 horas
Duração: 3h

1. Recorde que o **pião de Euler** é o sistema mecânico $(SO(3), \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, 0)$, onde a métrica Riemanniana $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é definida em $SO(3)$ por

$$\langle\langle V, W\rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \langle V\xi, W\xi\rangle dm, \qquad V, W \in T_S SO(3),$$

sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno Euclidiano e m a medida em $\mathbb{R}^3$ que define a distribuição de massa.

(2,5 val.) (a) Mostre que a aplicação $SO(3) \times SO(3) \ni (R, S) \mapsto RS \in SO(3)$ define uma acção de $SO(3)$ em si mesmo por isometrias de $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$. Mostre ainda que a correspondente acção infinitesimal associa a cada $B \in \mathfrak{so}(3)$ o campo vectorial $X^B \in \mathfrak{X}(SO(3))$ dado por $(X^B)_S = BS$.

(2,5 val.) (b) Deduza do Teorema de Noether que a quantidade $J^B = \langle\langle BS, \dot{S}\rangle\rangle$ é conservada ao longo de qualquer movimento $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ do pião de Euler. Escrevendo como habitualmente $\dot{S} = SA$, com $A \in \mathfrak{so}(3)$ e $\Omega = \Omega(A)$ (onde $\Omega : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ é o isomorfismo dado por $A\xi = \Omega(A) \times \xi$ para todo o $\xi \in \mathbb{R}^3$), mostre que a conservação de J^B para todo o $B \in \mathfrak{so}(3)$ é equivalente à conservação de

$$p = S \int_{\mathbb{R}^3} (\xi \times (\Omega \times \xi))\, dm.$$

(2,5 val.) (c) Escrevendo como habitualmente $p = SP = SI\Omega$, deduza as **equações de Euler** $\dot{P} = P \times \Omega$ a partir da conservação de p, e escreva estas equações na base dos eixos principais de inércia. Mostre ainda que a energia cinética do pião de Euler é $K = \frac{1}{2}\langle\langle \dot{S}, \dot{S}\rangle\rangle = \frac{1}{2}\langle P, \Omega\rangle$.

(2,5 val.) (d) Se identificarmos $TSO(3)$ com $SO(3)\times\mathbb{R}^3$ como na alínea (b), podemos usar o produto interno Euclidiano para identificar $T^*SO(3)$ com $SO(3)\times\mathbb{R}^3$. Com estas identificações, mostre que o Lagrangeano do pião de Euler é $L = \frac{1}{2}\langle I\Omega, \Omega\rangle$, a transformação de Legendre é dada por $P = I\Omega$ e o correspondente Hamiltoniano é $H = \frac{1}{2}\langle P, I^{-1}P\rangle$.

(2,5 val.) (e) Mostre que H é completamente integrável com primeiros integrais $F_1 = H$, $F_2 = \|P\|^2$ e $F_3 = p^3$. Será possível que $\{p^1, p^2\} = 0$? Prove ainda as identidades $\{P^1, P^2\} = P^3$, $\{P^2, P^3\} = P^1$ e $\{P^3, P^1\} = P^2$.

(2,5 val.) (f) Mostre que a restrição não holónoma $\Omega^3 = 0$ corresponde a uma distribuição não integrável em $SO(3)$. Mostre ainda que a força de reacção perfeita associada a esta restrição é identicamente nula se e só se $I_1 = I_2$.

2. O interior de um buraco negro de massa M sem rotação é descrito pela região $r < 2M$ da métrica de Schwarzschild

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi \otimes d\varphi\right).$$

(2,5 val.) (a) Mostre que a transformação de coordenadas $r = 2M \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)$ põe a métrica na forma

$$g = \operatorname{tg}^2\left(\frac{u}{2}\right) dt \otimes dt + 4M^2 \cos^4\left(\frac{u}{2}\right)\left(d\theta \otimes d\theta + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi \otimes d\varphi - du \otimes du\right),$$

onde $0 < u < \pi$. (Portanto o interior do buraco negro pode ser visto como um modelo cosmológico em que o espaço é um cilindro $\mathbb{R} \times S^2$ que se expande na direcção tangente a $\mathbb{R}$ e se contrai nas direcções tangentes a S^2).

(2,5 val.) (b) Deduza que qualquer partícula material que atravesse o horizonte atingirá a singularidade $r = 0$ num tempo próprio inferior ou igual a πM.