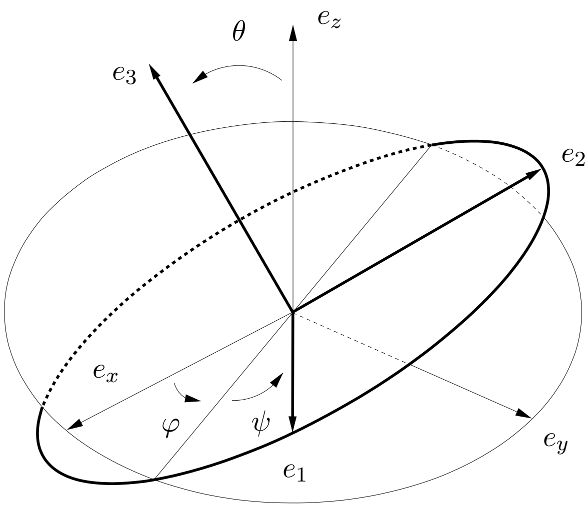
1º Exame de Mecânica Geométrica

7 de Janeiro de 2011 – 9 horas

Duração: 3h



1. Recorde que a energia cinética de um corpo rígido com um ponto fixo cujos momentos principais de inércia satisfazem $I_1 = I_2$ é dada em termos dos ângulos de Euler (θ, φ, ψ) por
$$K = \frac{I_1}{2}\left(\left(v^\theta\right)^2 + (v^\varphi)^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(v^\psi + v^\varphi\cos\theta\right)^2.$$

(3 val.) (a) Mostre que o Lagrangeano $L : TSO(3) \to \mathbb{R}$ que descreve o movimento deste corpo rígido sob a acção de uma força conservativa com energia potencial da forma $U = u(\theta)$ é hiper-regular, e determine o correspondente Hamiltoniano $H : T^*SO(3) \to \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Prove que H é completamente integrável com primeiros integrais H, p_φ e p_ψ.

(2 val.) (c) Determine as trajectórias do sistema que satisfazem $\dot\theta(t) \equiv 0$. Em particular, mostre que a linha nodal destas trajectórias precessa necessariamente a menos que $u'(\theta) = 0$, e que a união destas trajectórias é a região onde H, p_φ e p_ψ não são independentes.

(2 val.) (d) No caso em que $u(\theta) \equiv 0$, use as equações de Euler $\dot P = P \times \left(I^{-1}P\right)$ para mostrar que se escolhermos como eixo dos zz a direcção do momento angular total $p = SP$ então o movimento do corpo rígido satisfaz $\dot\theta(t) \equiv 0$.

(2 val.) (e) Nas condições da alínea anterior, use o Teorema de Noether para argumentar que $p_\varphi = \|p\|$, e deduza da equação de Euler que $\dot\varphi = \frac{\|p\|}{I_1}$. Calcule p_ψ e $\dot\psi$, e aproveite para mostrar que se o corpo é quase planar e $\theta \simeq 0$ então $\dot\varphi \simeq -2\dot\psi$. (Este facto é referido em *"Está a brincar, Sr. Feynman!"* a propósito de um prato atirado ao ar).

(2 val.) (f) Calcule a força de reacção perfeita necessária para bloquear o movimento do corpo rígido em torno do eixo e_3 (com uma energia potencial $u(\theta)$ arbitrária).

(2 val.) 2. (a) Mostre que de todas as partículas materiais presentes nos acontecimentos $(t_0, 0)$ e $(t_1, 0)$ do espaço-tempo de Minkowski bidimensional $(\mathbb{R}^2, -dt \otimes dt + dx \otimes dx)$, a que mede um intervalo de tempo próprio maior entre os dois acontecimentos é aquela cujo movimento é representado pelo segmento $[t_0, t_1] \times \{0\}$.

(2 val.) (b) Prove o mesmo resultado para um espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker bidimensional $(I \times \mathbb{R}, -dt \otimes dt + a^2(t) dx \otimes dx)$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $a(t) > 0$ é uma função de classe C^∞.

(3 val.) (c) Mostre que o arco de geodésica do tipo tempo correspondente a uma órbita circular completa no plano equatorial do espaço-tempo de Schwarzschild, descrito pela métrica tridimensional

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi,$$

não é a curva do tipo tempo de comprimento máximo que une os seus dois extremos.