Resumos de Mecânica Geométrica

29 de Abril de 2011

I. Variedades Pseudo-Riemannianas

1. Dados uma variedade diferenciável Q de dimensão n e $p \in Q$, designamos por T_pQ o *espaço tangente* a Q no ponto p, i.e., o conjunto de todas as derivações $v : C^\infty(Q) \to \mathbb{R}$ em p, onde $C^\infty(Q)$ designa o conjunto das funções de classe C^∞ $f : Q \to \mathbb{R}$. Se $U \subset Q$ é um aberto com $p \in U$ e $x^i : U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ é um sistema de coordenadas locais, podemos sempre escrever
$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
(usamos a convenção da soma de Einstein de subentender uma soma sobre todos os índices repetidos). Dado um caminho $c : \mathbb{R} \to Q$ de classe C^∞, designamos por $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}Q$ a derivação
$$\dot{c}(t) \cdot f = \frac{d}{dt} f(c(t)).$$
Em coordenadas locais,
$$\dot{c}(t) = \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i},$$
onde $x^i(t) = x^i(c(t))$. $T_p^*Q = (T_pQ)^*$ representa o *espaço cotangente* a Q no ponto p. Designamos por $\left\{dx^1, \ldots, dx^n\right\}$ a *base dual* de $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$; isto é,
$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$
Portanto qualquer covector $\omega \in T_p^*Q$ se pode escrever na forma
$$\omega = \omega_i dx^i.$$
Designamos ainda por $\mathcal{X}(Q)$ o conjunto dos campos de classe C^∞ em Q, por $\Omega^k(Q)$ o conjunto das formas diferenciais de grau k em Q, e por $\mathcal{T}_l^k(Q)$ o conjunto dos campos tensoriais de tipo $\binom{k}{l}$ e classe C^∞ em Q.

2. Um tensor $g \in T_p^*Q \otimes T_p^*Q$ diz-se
   (i) *Simétrico* se $g(v, w) = g(w, v)$ para todo o $v, w \in T_pQ$;
   (ii) *Não degenerado* se $g(v, w) = 0$ para todo o $w \in T_pQ$ implica $v = 0$;
   (iii) *Definido positivo* se $g(v, v) > 0$ para todo o $v \in T_pQ \setminus \{0\}$.

3. Se $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \in T_p^*Q \otimes T_p^*Q$ então
   (i) g é simétrico *sse* $g_{ij} = g_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$;
   (ii) g é não degenerado *sse* $\det(g_{ij}) \neq 0$;
   (iii) g é definido positivo *sse* (g_{ij}) é uma matriz definida positiva.
4. Uma *variedade pseudo-Riemanniana* é um par (Q, g), onde Q é uma variedade diferenciável e $g \in \mathcal{T}_2^0(Q)$ é simétrico e não degenerado (dito uma *métrica pseudo-Riemanniana* em Q.) Se além disso g é definido positivo, (Q, g) diz-se uma *variedade Riemanniana*.
5. Se Q e M são variedades diferenciáveis, uma aplicação $f : Q \to M$ diz-se de *classe* C^∞ se dadas coordenadas locais $x^i : U \subset Q \to \mathbb{R}$ e $y^i : V \subset M \to \mathbb{R}$ com $f(U) \subset V$, a expressão de f nestas coordenadas, $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$, é dada por funções de classe C^∞. A *aplicação tangente*, ou *push-forward*, é a aplicação linear que a $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}Q$ associa
   $$f_* \dot{c}(t) = \frac{d}{dt} f(c(t)) \in T_{f(c(t))}M$$
   para qualquer caminho $c : \mathbb{R} \to Q$. Em coordenadas locais,
   $$f_* \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j \frac{\partial}{\partial y^i}.$$
6. Um *difeomorfismo* é uma bijecção de classe C^∞ cuja inversa é também de classe C^∞.
7. $f : N \to Q$ diz-se uma *imersão* se $f_* : T_pN \to T_{f(p)}Q$ é injectiva para todo o $p \in N$ (em particular, $\dim N \leq \dim Q$). Uma imersão diz-se um *mergulho* se é um difeomorfismo na sua imagem.
8. Seja (Q, g) uma variedade Riemanniana e $f : N \to Q$ uma imersão. Então $h \in \mathcal{T}_2^0(N)$ definido por
   $$h(v, w) = g(f_* v, f_* w)$$
   para $v, w \in T_pN, p \in N$ define uma métrica Riemanniana em N, dita a *métrica induzida* por g em N.
9. Se (Q, g) e (M, h) são variedades pseudo-Riemannianas, um difeomorfismo $f : Q \to M$ diz-se uma *isometria* se
   $$h(f_* v, f_* w) = g(v, w)$$
   para quaisquer $v, w \in T_pQ, p \in Q$.
10. Um *grupo de Lie* G é um grupo com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação
    $$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$$
    é de classe C^∞.
11. Dado um grupo de Lie G e $x \in G$, define-se a *translacção esquerda (direita) por* x como sendo o difeomorfismo $L_x : G \to G$ $(R_x : G \to G)$ dado por $L_x(y) = xy$ $(R_x(y) = yx)$ para todo o $y \in G$. Uma métrica pseudo-Riemanniana g em G diz-se *invariante à esquerda (direita)* se L_x (R_x) é uma isometria para todo o $x \in G$.
12. Se G é um grupo de Lie, $\mathfrak{g} = T_eG$ diz-se a sua *álgebra de Lie* (onde $e \in G$ é o elemento neutro do grupo).

13. $g(\cdot,\cdot) \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle$ é uma métrica invariante à esquerda no grupo de Lie G *sse*

$$\langle v_x, w_x\rangle_x = \langle (L_{x^{-1}})_* v_x, (L_{x^{-1}})_* w_x\rangle_e$$

para todo o $x \in G$. Portanto qualquer forma bilinear simétrica não degenerada em $\mathfrak{g}$ determina uma métrica invariante à esquerda em G.

14. Se $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é uma variedade pseudo-Riemanniana e $c : \mathbb{R} \to Q$ é um mergulho, o *comprimento* do segmento $c([a,b])$ é dado por

$$\int_a^b |\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle|^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

15. Uma *conexão afim* numa variedade diferenciável Q é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(Q) \times \mathcal{X}(Q) \to \mathcal{X}(Q)$ tal que
    (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
    (ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
    (iii) $\nabla_X(fY) = (X \cdot f)Y + f\nabla_X Y$

    para todo o $X, Y, Z \in \mathcal{X}(Q), f, g \in C^\infty(Q)$.

16. Seja ∇ uma conexão afim em Q, $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$, $p \in Q$. Então $(\nabla_X Y)_p \in T_pQ$ só depende de X_p e dos valores de Y ao longo de uma curva tangente a X em p. Se $(x^1, \ldots, x^n)$ são coordenadas locais em torno de p,

$$\nabla_X Y = \left(X \cdot Y^i + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde as n^3 funções $\Gamma^i_{jk} : Q \to \mathbb{R}$, ditas os *símbolos de Christoffel*, são definidas através de

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

17. Um campo vectorial X definido ao longo de um caminho $c : \mathbb{R} \to Q$ diz-se *paralelo ao longo de* c se

$$\frac{DX}{dt} \equiv \nabla_{\dot{c}} X = 0.$$

O caminho c diz-se uma *geodésica* da conexão ∇ se

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = 0.$$

Em coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$ as equações das geodésicas são

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

18. Uma conexão ∇ numa variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ diz-se *compatível* com a métrica se

$$X \cdot \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

para todo o $X, Y, Z \in \mathcal{X}(Q)$. Em particular, isto significa que comprimentos de vectores e ângulos entre vectores transportados paralelamente ao longo de uma curva permanecem constantes ao longo da curva.

19. Dados dois campos vectoriais $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$, o seu *parêntesis de Lie* é o campo vectorial definido pela derivação

$$[X,Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

Em coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$ tem-se

$$[X,Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(X \cdot Y^i - Y \cdot X^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Uma base local de campos vectoriais $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é localmente da forma

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

para certas coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$ *sse* $[X_i, X_j] = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

20. A conexão ∇ diz-se *simétrica* se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$. Em coordenadas locais isto traduz-se na condição

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \quad (i, j, k = 1, \ldots, n).$$

21. *Teorema de Levi-Civita:* Dada uma variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, existe uma única conexão ∇ em Q tal que
    (i) ∇ é simétrica;
    (ii) ∇ é compatível com $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Em coordenadas locais os símbolos de Christoffel para esta conexão são

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})$$

onde $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

22. Se $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é pseudo-Riemanniana e $c : \mathbb{R} \to Q$ é uma geodésica (da conexão de Levi-Civita) então $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$ é constante. A geodésica diz-se do tipo
    (i) *Espaço* se $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle > 0$;
    (ii) *Tempo* se $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle < 0$;
    (iii) *Luz* se $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$.

Se a geodésica é do tipo espaço ou tempo então o parâmetro t da geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

II. Sistemas Mecânicos em Variedades Riemannianas

1. O *fibrado tangente* de uma variedade diferenciável Q de dimensão n é o conjunto

$$TQ = \bigcup_{p \in Q} T_p Q = \{v_p \in T_p Q : p \in Q\}.$$

A *projecção canónica* é a aplicação $\pi : TQ \to Q$ dada por $\pi(v_p) = p$ para $v_p \in T_pQ, p \in Q$. O conjunto $\pi^{-1}(p) = T_pQ$ diz-se a *fibra* sobre $p \in Q$.

Um sistema de coordenadas locais $(q^1, \dots, q_n)$ em $U \subset Q$ induz um sistema de coordenadas locais $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ em $\pi^{-1}(U) \subset TQ$ do seguinte modo: a um vector $v_p \in \pi^{-1}(U)$ associamos as coordenadas $(q^1, \dots, q^n)$ de $p \in U$ e as componentes $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in \mathbb{R}^n$ de v_p na base de T_pQ proveniente do sistema de coordenadas,

$$v_p = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Portanto TQ é naturalmente uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, e a projecção canónica é uma aplicação de classe C^∞.

Um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(Q)$ é uma função C^∞ $X : Q \to TQ$ tal que $X(p) \in T_pQ$ para todo o $p \in Q$, isto é, tal que $\pi \circ X = \mathrm{id}_Q$. Diz-se que X é uma *secção* do fibrado tangente.

2. O *fibrado cotangente* de Q é o conjunto

$$T^*Q = \bigcup_{p \in Q} T_p^*Q = \{\omega_p \in T_p^*Q : p \in Q\}.$$

A *projecção canónica* é a aplicação $\pi : T^*Q \to Q$ dada por $\pi(\omega_p) = p$ para $\omega_p \in T_p^*Q, p \in Q$. O conjunto $\pi^{-1}(p) = T_p^*Q$ diz-se a *fibra* sobre $p \in Q$.

Um sistema de coordenadas locais $(q^1, \dots, q_n)$ em $U \subset Q$ induz um sistema de coordenadas locais $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ em $\pi^{-1}(U) \subset T^*Q$ do seguinte modo: a um covector $\omega_p \in \pi^{-1}(U)$ associamos as coordenadas $(q^1, \dots, q^n)$ de $p \in U$ e as componentes $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ de ω_p na base de T_p^*Q proveniente do sistema de coordenadas,

$$\omega_p = p_i dq^i.$$

Portanto T^*Q é naturalmente uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, e a projecção canónica é uma aplicação de classe C^∞.

3. Um *sistema mecânico* é um triplo $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$, onde Q é uma variedade diferenciável, dita o *espaço de configurações*, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica Riemanniana em Q e $\mathcal{F} : TQ \to T^*Q$, dita a *força exterior*, satisfaz $\mathcal{F}(T_pQ) \subset T_p^*Q$ para todo o $p \in Q$.

4. Dado um sistema mecânico $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$,

   (i) A *energia cinética* é a aplicação C^∞ $K : TQ \to \mathbb{R}$ dada por

   $$K(v_p) = \frac{1}{2} \langle v_p, v_p \rangle$$

   para todo o $v_p \in T_pQ, p \in Q$; em coordenadas locais $(q^1, \dots, q^n)$,

   $$K\left(\dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

   (ii) O *operador massa* é a aplicação C^∞ $\mu : TQ \to T^*Q$ dada por

   $$\mu(v_p) = \langle v_p, \cdot \rangle \in T_p^*Q$$

   para todo o $v_p \in T_pQ, p \in Q$; em coordenadas locais $(q^1, \dots, q^n)$,

   $$\mu\left(\dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = g_{ij} \dot{q}^i dq^j.$$

(iii) $\mathcal{F}$ diz-se *posicional* se é constante ao longo das fibras, i.e., se $\mathcal{F}(v_p) = \mathcal{F}(w_p)$ para todo o $v_p, w_p \in T_pQ, p \in Q$.

(iv) $\mathcal{F}$ diz-se *conservativa* se existe $U : Q \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}(v_p) = -dU_p$ para todo o $p \in Q$ (em particular qualquer força conservativa é posicional); a função U diz-se a *energia potencial*.

5. Dado um sistema mecânico $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$, a *Lei de Newton* é a equação diferencial

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = \mathcal{F}(\dot{c})$$

onde

$$\frac{D\dot{c}}{dt} \equiv \nabla_{\dot{c}}\dot{c}$$

é a *aceleração* da curva (∇ é a conexão de Levi-Civita). Uma solução $c : \mathbb{R} \to Q$ da equação de Newton diz-se um *movimento* do sistema mecânico.

6. Em coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n)$ tem-se

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i.$$

Em particular se $\mathcal{F} = -dU$ é conservativa as equações do movimento são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}.$$

7. Num sistema mecânico conservativo $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, -dU)$, a energia mecânica $E_m = K + U$ é constante ao longo de qualquer movimento.

8. Seja $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, -dU)$ um sistema mecânico conservativo e $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_h = \{p \in Q : U(p) < h\} \neq \varnothing.$$

A *métrica de Jacobi* na variedade Q_h é dada por

$$\langle\langle v_p, w_p \rangle\rangle = 2[h - U(p)]\langle v_p, w_p \rangle$$

para todo o $v_p, w_p \in T_pQ, p \in Q$.

9. *Teorema de Jacobi:* Os movimentos de um sistema mecânico conservativo $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, -dU)$ com energia mecânica h são, a menos de reparametrização, geodésicas da métrica de Jacobi na variedade Q_h.

10. Uma curva $c : \mathbb{R} \to Q$ é uma geodésica reparametrizada *sse* satisfaz a equação

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = f(t)\dot{c}$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

11. Seja $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = e^{2\rho}\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica conformemente relacionada com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (onde $\rho \in C^\infty(Q)$). Então a conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y \rangle \operatorname{grad} \rho$$

para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$, onde $\operatorname{grad} \rho$ é definido por $\langle \operatorname{grad} \rho, Z \rangle = d\rho(Z)$ para todo o $Z \in \mathcal{X}(Q)$.

12. Uma *restrição holónoma* é uma subvariedade $N \subset Q$ tal que $\dim N < \dim Q$. Um caminho $c : \mathbb{R} \to Q$ diz-se *compatível* com N se $c(t) \in N$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.
13. Uma *força de reacção* num sistema mecânico com restrição holónoma $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F}, N)$ é uma aplicação $\mathcal{R} : TN \to T^*Q$ com $\mathcal{R}(T_pN) \subset T_p^*Q$ para todo o $p \in N$ tal que as soluções da *Lei de Newton generalizada*

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = (\mathcal{F} + \mathcal{R})(\dot{c})$$

com condição inicial em TN são compatíveis com N. Diz-se que a força de reacção é *perfeita*, ou que satisfaz o *princípio de D'Alembert*, se

$$\mu^{-1}\mathcal{R}(v_p) \in T_p^\perp N$$

para todo o $v_p \in T_pN, p \in N$.
14. Dado um sistema mecânico com restrição holónoma $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F}, N)$, existe uma única força de reacção $\mathcal{R} : TN \to T^*Q$ que satisfaz o princípio de D'Alembert. As soluções da Lei de Newton generalizada

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = (\mathcal{F} + \mathcal{R})(\dot{c})$$

são exactamente os movimentos do sitema mecânico $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, \mathcal{F}_N)$, onde $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é a métrica induzida em N por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\mathcal{F}_N$ é a restrição de $\mathcal{F}$ a TN. Em particular, se $\mathcal{F} = -dU$ é conservativa então $\mathcal{F}_N = -d\left(U|_N\right)$.
15. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita D. Então

$$D_XY = \left(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)^\top$$

para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(N)$, onde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões quaisquer de X, Y a $\mathcal{X}(Q)$ e $^\top : TQ|_N \to TN$ designa a projecção ortogonal. Além disso,

$$B(X,Y) = \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - D_XY$$

(dita a *segunda forma fundamental de* N) está bem definida, e $B(X,Y)_p \in T_p^\perp N$ é uma função bilinear simétrica de X_p, Y_p para todo o $p \in N$.

III. Corpo Rígido

1. Um *corpo rígido com um ponto fixo* é qualquer sistema mecânico da forma $(SO(3), \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, \mathcal{F})$ com

$$\langle\langle\dot{S}_1, \dot{S}_2\rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \langle\dot{S}_1\boldsymbol{\xi}, \dot{S}_2\boldsymbol{\xi}\rangle dm,$$

onde m é uma medida positiva e finita em $\mathbb{R}^3$ para a qual as funções $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}^2$ são integráveis (dita a *distribuição de massa da configuração de referência*), $\langle\cdot,\cdot\rangle$ designa o produto interno Euclidiano usual em $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{F} : TSO(3) \to T^*SO(3)$ é uma força exterior.

2. Usando a identificação
$$\mathbb{R}^9 \simeq M_3(\mathbb{R}) \supset SO(3)$$
temos
$$T_S SO(3) = \{SA : A^t = -A\} = \{SA : A \in \mathfrak{so}(3)\} = (L_S)_* \, \mathfrak{so}(3).$$
3. A métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ definida em $SO(3)$ por um corpo rígido com um ponto fixo é invariante à esquerda (portanto existem tantos corpos rígidos com um ponto fixo como produtos internos definidos positivos em $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$, i.e., como matrizes reais 3×3 simétricas definidas positivas).
4. Tem-se
$$\langle\langle \dot{S}_1, \dot{S}_2 \rangle\rangle = \operatorname{tr}\left(\dot{S}_1 J \dot{S}_2^{\,t}\right),$$
onde
$$J_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi^i \xi^j dm.$$
5. Se $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ é um caminho e D é a conexão de Levi-Civita de $(SO(3), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ então
$$\langle\langle D_{\dot{S}} \dot{S}, \dot{R} \rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \ddot{S}\boldsymbol{\xi}, \dot{R}\boldsymbol{\xi} \rangle dm$$
6. O *momento angular* de um corpo rígido cujo movimento é descrito por $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ é o vector
$$\mathbf{p}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[(S(t)\boldsymbol{\xi}) \times \left(\dot{S}(t)\boldsymbol{\xi} \right) \right] dm.$$
Se $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ é uma geodésica de $(SO(3), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ então $\mathbf{p}(t)$ é constante.
7. Existe um isomorfismo vectorial $\boldsymbol{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$A\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$
para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$.
8. O operador linear $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por
$$I(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^3} [\boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi})] dm$$
diz-se o *tensor de inércia* do corpo rígido.
9. O tensor de inércia de um corpo rígido é um operador linear simétrico definido positivo e
$$K = \frac{1}{2}\langle\langle \dot{S}, \dot{S} \rangle\rangle_S = \frac{1}{2}\langle\langle SA, SA \rangle\rangle_S = \frac{1}{2}\langle I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle,$$
onde $\dot{S} = SA$ e $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(A)$.
10. Existe uma base ortonormada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ na qual I admite a representação $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Os eixos $\mathbb{R}\mathbf{e}_1, \mathbb{R}\mathbf{e}_2, \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ dizem-se os *eixos principais de inércia* e os valores próprios I_1, I_2, I_3 os *momentos principais de inércia* do corpo rígido.

11. Na base canónica o tensor de inércia admite a representação matricial

$$I = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^3}(y^2+z^2)dm & -\int_{\mathbb{R}^3} xydm & -\int_{\mathbb{R}^3} xzdm \\ -\int_{\mathbb{R}^3} xydm & \int_{\mathbb{R}^3}(x^2+z^2)dm & -\int_{\mathbb{R}^3} yzdm \\ -\int_{\mathbb{R}^3} xzdm & -\int_{\mathbb{R}^3} yzdm & \int_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2)dm \end{pmatrix}$$

12. *Equações de Euler:* As equações do movimento do corpo rígido com 1 ponto fixo na ausência de forças exteriores são dadas por

$$I\dot{\mathbf{\Omega}} = (I\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{\Omega}.$$

Na base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dos eixos principais de inércia, estas equações escrevem-se

$$\begin{cases} I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 \\ I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 \\ I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 \end{cases}$$

13. $S\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ é a *velocidade angular instantânea* do corpo rígido: em cada instante, o corpo roda em torno de $\mathbb{R}\boldsymbol{\omega}$ com velocidade angular $\|\boldsymbol{\omega}\|$. Portanto $\mathbf{\Omega}$ é a velocidade angular no referencial (acelerado) ligado ao corpo rígido.
14. Se $I_1 > I_2 > I_3$, os pontos de equilíbrio das equações de Euler são dados por

$$\mathbf{\Omega} = \pm\|\mathbf{\Omega}\|\mathbf{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

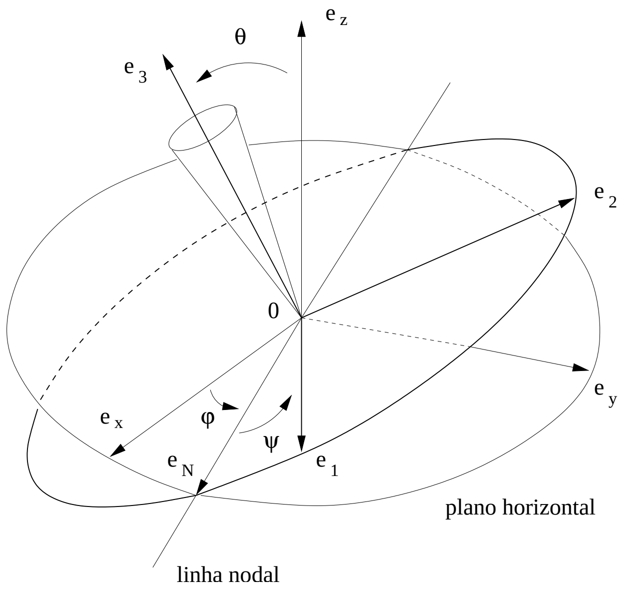
e são estáveis para $i = 1, 3$ e instáveis para $i = 2$.
15. O *elipsóide de inércia* é o conjunto

$$E = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \langle I\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle = 1\}.$$

16. *Teorema de Poinsot:* Se $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ é um movimento do corpo rígido com um ponto fixo na ausência de forças exteriores, então $S(t)E$ rola sem escorregar sobre um plano fixo perpendicular ao momento angular (constante) $\mathbf{p}$, onde E é o elipsóide de inércia.
17. Se $I_1 > I_2 > I_3$, as rotações em torno de $\mathbb{R}\mathbf{e}_1, \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ são estáveis não só para $\mathbf{\Omega}(t)$ mas também para $\boldsymbol{\omega}(t)$.
18. *Ângulos de Euler:* Correspondem às coordenadas locais $(\theta, \varphi, \psi) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ em $SO(3)$ definidos por

$$S(\theta, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A interpretação geométrica destes ângulos é a indicada na figura.



19. Se $I_1 = I_2$ então a energia cinética do corpo rígido com um ponto fixo nas coordenadas locais $(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$ de $TSO(3)$ é dada por

$$K = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2.$$

20. *Pião de Lagrange:* Assumindo que o centro de massa do corpo rígido é um ponto do eixo dos zz,

$$\boldsymbol{\xi}_{CM} \equiv \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\xi} dm = l\mathbf{e}_z$$

(onde

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} dm$$

é a massa total do corpo rígido), e que a única força exterior provém do campo gravitacional constante, obtém-se um sistema mecânico conservativo com energia potencial

$$U = Mgl\cos\theta.$$

IV. Mecânica Lagrangeana

1. Um *Lagrangeano* é uma função $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se $c : \mathbb{R} \to Q$ é um caminho C^∞ e $a < b \in \mathbb{R}$, a *acção* de $c(t)$ em $[a, b]$ correspondente ao Lagrangeano L é o número real

$$S = \int_a^b L(\dot{c}(t), t)dt$$

(note-se que $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}Q$). Uma *variação* de $c(t)$ em $[a, b]$ é uma função $\gamma : \mathbb{R}\times]-\varepsilon, \varepsilon[\to Q$ ($\varepsilon > 0$) de classe C^∞ tal que

$$\gamma(t, 0) = c(t)$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}\gamma(a, \alpha) &= c(a)\\ \gamma(b, \alpha) &= c(b)\end{aligned}$$

para todo o $\alpha \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. A uma variação de $c(t)$ corresponde a função $S :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ dada por

$$S(\alpha) = \int_a^b L(\dot{\gamma}(t, \alpha), t)dt$$

(onde $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \gamma_* \frac{\partial}{\partial t}$). O caminho $c(t)$ diz-se um *ponto crítico* da acção correspondente ao Lagrangeano L no intervalo $[a, b]$ se

$$\frac{dS}{d\alpha}(0) = 0$$

para qualquer variação γ.

2. O caminho $c : \mathbb{R} \to Q$ é um ponto crítico da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no intervalo $[a, b]$ *sse* satisfaz as *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{c}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

para todo o $t \in]a, b[$, onde $(q^1, \ldots, q^n)$ são coordenadas locais em Q nalguma vizinhança de algum ponto de $c([a, b]) \subset Q$.

3. Os movimentos de um sistema mecânico conservativo $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, -dU)$ são os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L = T - U$ em qualquer intervalo.

4. As geodésicas de uma variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ são os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(v_p) = \frac{1}{2}\langle v_p, v_p \rangle = K(v_p)$$

em qualquer intervalo

5. As geodésicas *não nulas* de uma variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ são, a menos de reparametrização, os pontos críticos do comprimento de arco, i.e., os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(v_p) = |\langle v_p, v_p \rangle|^{\frac{1}{2}}$$

em qualquer intervalo.

6. Se o caminho $c : \mathbb{R} \to Q$ satisfaz $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \neq 0$ para todo o $t \in [a, b]$ e o comprimento

$$S = \int_a^b |\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|^{\frac{1}{2}} dt$$

de $c(t)$ entre $c(a)$ e $c(b)$ é $\leq$ (ou $\geq$) que o comprimento de qualquer outro caminho entre os mesmos pontos então $c|_{]a,b[}$ é um arco de geodésica reparametrizado.

7. Sejam $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedades pseudo-Riemannianas isométricas, $f : Q \to M$ uma isometria e $c : \mathbb{R} \to Q$ uma geodésica. Então $f \circ c : \mathbb{R} \to M$ é uma geodésica.

V. Mecânica Hamiltoniana

1. Escrevemos
$$TQ \times_Q T^*Q \equiv \bigcup_{p \in Q} T_pQ \times T_p^*Q.$$
Dado um Lagrangeano $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos a função $\tilde{H} : TQ \times_Q T^*Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ através de
$$\tilde{H}(v_p, \omega_p, t) = \omega_p(v_p) - L(v_p, t).$$
A união dos pontos críticos das funções $\tilde{H}|_{\{\omega_p\} \times T_pQ \times \{t\}} : T_pQ \to \mathbb{R}$ é uma subvariedade de $TQ \times_Q T^*Q \times \mathbb{R}$ que é o gráfico de uma função de domínio $TQ \times \mathbb{R}$; se esta variedade for também o gráfico de uma função de domínio $T^*Q \times \mathbb{R}$, o Lagrangeano diz-se *hiper-regular*.

2. Dadas coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n)$ em Q, introduzimos as correspondentes coordenadas locais induzidas em TQ e T^*Q:
$$(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n) \mapsto \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i};$$
$$(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto p_i dq^i.$$

3. Um Lagrangeano hiper-regular $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define um difeomorfismo que preserva fibras entre $TQ \times \mathbb{R}$ e $T^*Q \times \mathbb{R}$, dado localmente por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ (dita a *transformação de Legendre*), e uma função C^∞ $H : T^*Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada localmente por $H = p_i \dot{q}^i - L$ (dita o *Hamiltoniano*), tais que a transformação de Legendre leva soluções das equações de Euler-Lagrange (definidas em $TQ \times \mathbb{R}$) em soluções das *equações de Hamilton* (definidas em $T^*Q \times \mathbb{R}$), dadas localmente por
$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

4. Se $\pi : T^*Q \to Q$ é a projecção canónica, definimos a *1-forma canónica* (ou *1-forma tautológica*, ou *potencial simpléctico canónico*) $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$ através de
$$\theta(\alpha_p) = \pi^* \alpha_p$$
para todo o $\alpha_p \in T^*Q$, e a *forma simpléctica canónica* $\omega \in \Omega^2(T^*Q)$ como sendo $\omega = d\theta$. Em coordenadas locais,
$$\theta = p_i dq^i;$$
$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

5. Se M é uma variedade diferenciável, $X \in \mathcal{X}(M)$ é um campo vectorial e $\omega \in \Omega^k(M)$ é uma forma-k, a *contracção* de X com ω é a forma-$(k-1)$ $X \rfloor \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ definida por
$$X \rfloor \omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$$
para todos os campos $Y_1, \ldots, Y_{k-1} \in \mathcal{X}(M)$.

6. Se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, as equações de Hamilton definem um fluxo cujo correspondente campo vectorial X_H satisfaz
$$X_H \rfloor \omega = -dH.$$
Em particular, $X_H \cdot H = 0$, i.e., o Hamiltoniano mantém-se constante ao longo das soluções das equações de Hamilton (ou equivalentemente ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange).
7. Uma *variedade simpléctica* é um par (M, ω), onde M é uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^2(M)$ é *fechada* ($d\omega = 0$) e *não degenerada* ($v_p \rfloor \omega = 0$ para todo o $v_p \in T_pM$ implica $v_p = 0$).
8. Se Q é uma variedade diferenciável de dimensão n então $(T^*Q, \omega = d\theta)$ é uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ (θ é a 1-forma canónica).
9. Se (M, ω) é uma varidedade simpléctica então $\dim M$ é par.
10. Se (M, ω) é uma variedade simpléctica e $H \in C^\infty(M)$ então o *campo Hamiltoniano* gerado por H é o (único) campo vectorial $X_H \in \mathcal{X}(M)$ tal que
$$X_H \rfloor \omega = -dH$$
($-X_H$ diz-se o *gradiente simpléctico* de H). O fluxo de X_H diz-se o *fluxo Hamiltoniano* gerado por H.
11. H é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano gerado por H (i.e., $X_H \cdot H = 0$).
12. *Teorema de Darboux:* Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ e $p \in M$. Então existem coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ numa vizinhança de p (ditas *coordenadas de Darboux*) tais que nessa vizinhança
$$\omega = dp_i \wedge dq^i = dp_1 \wedge dq^1 + \ldots + dp_n \wedge dq^n.$$
13. Se (M, ω) é uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ então $\omega^n = \overbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}^{n \text{ vezes}}$ é uma forma de volume em M (e portanto M é orientável).
14. Um *simplectomorfismo* entre duas variedades simplécticas (M, ω) e (N, Ω) é um difeomorfismo $\Phi : M \to N$ tal que $\Phi^*\Omega = \omega$.
15. Seja M uma variedade diferenciável, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$. O campo X define um *fluxo* $\Phi^X : M \times \mathbb{R} \to M$, determinado pela solução $\Phi^X_t(p)$ do problema de Cauchy
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi^X_t(p) = X_{\Phi^X_t(p)} \\ \Phi^X_0(p) = p \end{cases}$$
As *derivadas de Lie* de f, ω, Y em ordem a X são definidas através de
$$\begin{aligned} \pounds_X f &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \Phi^X_t, \\ \pounds_X \omega &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\Phi^X_t\right)^* \omega, \\ \pounds_X Y &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\Phi^X_{-t}\right)_* Y, \end{aligned}$$

e calculam-se usando

$$\begin{aligned}
&\pounds_X f = X \cdot f,\\
&\pounds_X \omega = X\rfloor d\omega + d(X\rfloor\omega) \text{ \textit{(fórmula mágica de Cartan)}},\\
&\pounds_X Y = [X, Y].
\end{aligned}$$

16. O fluxo Hamiltoniano gerado por $H \in C^\infty(M)$ é um grupo a 1 parâmetro de simplectmorfismos.
17. *Teorema de Liouville:* O fluxo Hamiltoniano preserva o volume simpléctico: se $A \subset M$ é mensurável e $H \in C^\infty(M)$ então

$$\mathrm{vol}\left(\Phi_t^{X_H}(A)\right) = \mathrm{vol}(A),$$

onde $\Phi_t^{X_H}(p)$ designa o fluxo de $X_H \in \mathcal{X}(M)$ no instante $t \in \mathbb{R}$ com condição inicial $p \in M$ e o volume simpléctico é definido por

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A \omega^n.$$

18. *Teorema da Recorrência de Poincaré:* Seja M uma variedade orientável com elemento de volume fixo, $g : M \to M$ um difeomorfismo que preserva volume, $A \subset M$ um conjunto de volume finito invariante para g (i.e., $g(A) = A$). Então quase todos os pontos de qualquer conjunto mensurável $B \subset A$ regressam a B infinitas vezes por iteração de g.
19. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, $H \in C^\infty(M)$, $A \subset M$ invariante para o fluxo Hamiltoniano de H, $\mathrm{vol}(A) < +\infty$. Dado $B \subset A$ mensurável, quase todas as trajectórias $\Phi_t^{X_H}(p)$ de condição inicial $p \in B$ regressam a B para valores arbitrariamente elevados de $|t|$.
20. $X \in \mathcal{X}(M)$ diz-se *localmente hamiltoniano* se para todo o $p \in M$ existe uma vizinhança $U \ni p$ e $H \in C^\infty(M)$ tais que tais que $X\rfloor\omega = -dH$ em U.
21. $X \in \mathcal{X}(M)$ é localmente hamiltoniano *sse* Φ_t^X é um grupo a 1 parâmetro de simplectomorfismos.
22. Se $F, G \in C^\infty(M)$, o seu *parêntesis de Poisson* é $\{F, G\} = X_F(G) = dG(X_F)$.
23. $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ é uma *álgebra de Lie*, i.e., têm lugar as seguintes propriedades:
    (i) $\{F, G\} = -\{G, F\}$ (*anti-simetria*);
    (ii) $\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{F, H\}$ (*bilinearidade*);
    (iii) $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$ (*identidade de Jacobi*),

    para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F, G, H \in C^\infty(M)$. Além disso, o parêntesis de Poisson satisfaz também

    (iv) $\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$ (*identidade de Leibniz*),

    para todo o $F, G, H \in C^\infty(M)$.
24. Se M é uma variedade diferenciável, $(\mathcal{X}(M), [\cdot,\cdot])$ é uma álgebra de Lie.
25. $C^\infty(M) \ni H \mapsto X_H \in \mathcal{X}(M)$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* entre $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ e $(\mathcal{X}(M), [\cdot,\cdot])$, i.e.,

(i) $X_{\alpha F+\beta G} = \alpha X_F + \beta X_G$;

(ii) $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$,

para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F, G, H \in C^\infty(M)$. O núcleo deste homomorfismo são as funções constantes, e a imagem são os campos hamiltonianos (que em particular formam uma subálgebra de Lie de $\mathcal{X}(M)$).

26. Uma *variedade de Poisson* é um par $(M, \{\cdot,\cdot\})$, onde M é uma variedade diferenciável e $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ satifaz
    (i) $\{F, G\} = -\{G, F\}$ (*anti-simetria*);
    (ii) $\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{F, H\}$ (*bilinearidade*);
    (iii) $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$ (*identidade de Jacobi*);
    (iv) $\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$ (*identidade de Leibniz*),

    para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F, G, H \in C^\infty(M)$.
27. Qualquer variedade simpléctica (M, ω) é naturalmente uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$.
28. *Teorema de Kirillov:* Qualquer variedade de Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$ é folheada por subvariedades simplécticas (S, ω_S) de tal forma que
$$\{F, G\}(p) = \{F|_S, G|_S\}(p)$$
para todo o $p \in M$, onde S é a folha simpléctica que contém p.
29. Se $(M, \{\cdot,\cdot\})$ é uma variedade de Poisson e $H \in C^\infty(M)$, o *campo Hamiltoniano* gerado por H é o campo $X_H \in \mathcal{X}(M)$ tal que
$$X_H \cdot F = \{H, F\}$$
para qualquer função $F \in C^\infty(M)$.
30. Dar uma estrutura de Poisson em M equivale a dar um tensor anti-simétrico $B \in \mathcal{T}^2_0(M)$ satisfazendo
$$B^{il}\partial_l B^{jk} + B^{jl}\partial_l B^{ki} + B^{kl}\partial_l B^{ij} = 0$$
em qualquer sistema de coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$. O parêntesis de Poisson é então dado por
$$\{F, G\} = B(dF, dG) = B^{ij}\partial_i F \partial_j G$$
e portanto
$$B^{ij} = \{x^i, x^j\}, \qquad X_H = B^{ij}\partial_i H \frac{\partial}{\partial x^j}.$$
Se (M, ω) é uma variedade simpléctica, tem-se
$$(B^{ij}) = -(\omega_{ij})^{-1}.$$
31. Uma *aplicação de Poisson* $f : M \to N$ entre duas variedades de Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$ e $(N, \{\cdot,\cdot\})$ é uma função C^∞ tal que
$$f^*\{F, G\} = \{f^*F, f^*G\} \Leftrightarrow \{F, G\} \circ f = \{F \circ f, G \circ f\}$$
para todo o $F, G \in C^\infty(N)$.

32. O fluxo Hamiltoniano $\Phi_t^{X_H} : M \to M$ gerado por $H \in C^\infty(M)$ é uma aplicação de Poisson.
33. A função $H \in C^\infty(M)$ é constante ao longo do seu fluxo Hamiltoniano.
34. Se $(M, \{\cdot,\cdot\})$ e $(N, \{\cdot,\cdot\})$ são variedades de Poisson, $f : M \to N$ é uma aplicação de Poisson e $H \in C^\infty(M)$ então
$$f_* X_{H\circ f} = X_H.$$
35. $C^\infty(M) \ni H \mapsto X_H \in \mathcal{X}(M)$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* entre $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ e $(\mathcal{X}(M), [\cdot,\cdot])$, i.e.,
    (i) $X_{\alpha F+\beta G} = \alpha X_F + \beta X_G$;
    (ii) $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$,

    para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F, G, H \in C^\infty(M)$. O núcleo deste homomorfismo dizem-se as *funções de Casimir*, e a imagem são os campos hamiltonianos (que em particular formam uma subálgebra de Lie de $\mathcal{X}(M)$).
36. O espaço tangente à folha simpléctica $S \subset M$ no ponto $p \in M$ é
$$T_pS = \left\{ (X_H)_p : H \in C^\infty(M) \right\} = \mathrm{Im}(B_p),$$
    onde B é o tensor de Poisson. As funções de Casimir são constantes em cada folha simpléctica.

VI. Simetria e Redução

1. Uma *acção* de um grupo de Lie G numa variedade M é uma aplicação $\Phi : G \times M \to M$ de classe C^∞ tal que
    (i) $\Phi(e, p) = p$;
    (ii) $\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(gh, p)$,

    para todo o $p \in M$, $g, h \in G$ ($e \in G$ é o elemento neutro de G). Em geral escreve-se $\Phi(g, p) = g \cdot p$.
2. Se G age em X, a *acção infinitesimal* de $\mathfrak{g} = T_eG$ em M é a aplicação *linear* $\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto X^\xi \in \mathcal{X}(M)$, onde
$$X_p^\xi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [c_\xi(t) \cdot p],$$
    sendo $c_\xi : \mathbb{R} \to G$ um caminho satisfazendo $c_\xi(0) = e$, $\dot{c}_\xi(0) = \xi$.
3. Uma acção de um grupo de Lie G na variedade de Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$ diz-se uma *acção de Poisson* se cada aplicação $p \mapsto g \cdot p$ é uma aplicação de Poisson.
4. Se a acção de G em $(M, \{\cdot,\cdot\})$ é de Poisson e X^ξ é Hamiltoniano para todo o $\xi \in \mathfrak{g}$, a aplicação $J : M \to \mathfrak{g}^*$ tal que
$$X^\xi = X_{\langle J,\xi\rangle}$$
    para todo o $\xi \in \mathfrak{g}$ diz-se a *aplicação momento* para a acção (onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ designa o emparelhamento dual).
5. Se G age em M, a função $H \in C^\infty(M)$ diz-se *G-invariante* se $H(g \cdot p) = H(p)$ para todo o $g \in G$, $p \in M$.

6. *Teorema de Noether (versão Hamiltoniana):* Se a acção de G em M admite uma aplicação momento $J : M \to \mathfrak{g}^*$ e $H \in C^\infty(M)$ é G-invariante então J é constante ao longo do fluxo Hamiltoniano de H.
7. Se G age em Q, então a acção de G em T^*Q definida por

$$g \cdot \alpha_p = \left(g^{-1} \cdot\right)^* \alpha_p \in T_{gp}Q$$

(dita o *levantamento* da acção para o fibrado cotangente) é uma acção de Poisson, e admite a aplicação momento $J : T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ dada por

$$\langle J(\alpha_p), \xi \rangle = \langle \alpha_p, Y_p^\xi \rangle$$

(onde $Y^\xi \in \mathcal{X}(Q)$ é a acção infinitesimal de ξ em Q e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o emparelhamento dual). Escolhendo uma base $\{X_1, \ldots, X_m\}$ em $\mathfrak{g}$ (de modo que $\xi = \xi^a X_a$ com $\xi^a \in \mathbb{R}$) e coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n)$ em Q (induzindo as usuais coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ em T^*Q), temos

$$Y^\xi = K_a^i(q^1, \ldots, q^n)\xi^a \frac{\partial}{\partial q^i}$$

(onde as $n \times m$ funções K_a^i são as *funções da acção* de G em Q), e portanto

$$\langle J(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n), \xi \rangle = p_i K_a^i(q^1, \ldots, q^n)\xi^a,$$

ou

$$J_a(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) = p_i K_a^i(q^1, \ldots, q^n).$$

8. *Teorema de Noether (versão Lagrangeana):* Se G age em Q e $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é G-*invariante* (i.e., $L\left((g\cdot)_* v, t\right) = L(v, t)$ para todo o $v \in T_pQ$, $p \in Q$) então a quantidade

$$\mathbb{F}L\left(Y^\xi\right) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} K_a^i \xi^a$$

é conservada ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange para todo o $\xi \in \mathfrak{g}$. (A aplicação linear $\mathbb{F}L : T_pQ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbb{F}L(v)(w) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(v + tw)$$

para todo o $w \in T_pM$ diz-se a *derivada de* L *ao longo da fibra* no ponto $v \in T_pQ$).
9. Se G age em M, define-se a seguinte relação de equivalência em M:

$$p \sim q \Leftrightarrow p = g \cdot p$$

para algum $g \in G$. A classe de equivalência de $p \in M$,

$$[p] = \{g \cdot p : g \in G\}$$

diz-se a *órbita* de p. O *quociente* de M pela acção de G é

$$\frac{M}{G} = \frac{M}{\sim} = \{[p] : p \in M\},$$

e a *projecção natural* $\pi : M \to M/G$ é a aplicação definida por $\pi(p) = [p]$.

10. *Redução de Poisson:* Se a acção de G em $(M, \{\cdot,\cdot\})$ é de Poisson e M/G é uma variedade, então M/G é naturalmente uma variedade de Poisson (identificando $C^\infty(M/G)$ com as funções G-invariantes em $C^\infty(M)$), e a projecção natural $\pi : M \to M/G$ é uma aplicação de Poisson. Em particular, π leva o fluxo Hamiltoniano de funções G-invariantes em M no fluxo Hamiltoniano das funções correspondentes em M/G.
11. Um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(G)$ diz-se *invariante à esquerda* se $(L_g)_* X = X$ para qualquer $g \in G$. O campo $X \in \mathcal{X}(G)$ é invariante à esquerda *sse*

$$X_g = (L_g)_* \xi$$

para algum $\xi \in \mathfrak{g} = T_eG$, pelo que podemos identificar $\mathfrak{g}$ com o espaço vectorial dos campos invariantes à esquerda em G. Se $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ são invariantes à esquerda, $[X, Y]$ é também invariante à esquerda, pelo que $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ é uma subálgebra de Lie de $(\mathcal{X}, [\cdot,\cdot])$ de dimensão $m = \dim(G)$, dita a *álgebra de Lie* do grupo G.
12. Se G é um grupo matricial (i.e., um subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ para algum $n \in \mathbb{N}$), então $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, e

$$[A, B] = AB - BA$$

para todo o $A, B \in \mathfrak{g}$.
13. Dada uma base $\{X_1, \dots, X_m\}$ de $\mathfrak{g}$, definem-se as *constantes de estrutura* C^a_{bc} associadas a esta base através de

$$[X_b, X_c] = C^c_{ab} X_c.$$

Dados m^3 números reais C^a_{bc}, eles são constantes de estrutura associadas a alguma base de uma determinada álgebra de Lie de dimensão m *sse*
   (i) $C^a_{bc} = -C^a_{cb}$;
   (ii) $C^d_{ab}C^e_{cd} + C^d_{bc}C^e_{ad} + C^d_{ca}C^e_{bd} = 0$.
14. A forma diferencial $\omega \in \Omega^1(G)$ diz-se *invariante à esquerda* se $(L_g)^* \omega = \omega$ para qualquer $g \in G$. A forma $\omega \in \Omega^1(G)$ é invariante à esquerda *sse*

$$\omega_g = \left(L_{g^{-1}}\right)^* \mu$$

para algum $\mu \in \mathfrak{g}^* = T_e^*G$, pelo que podemos identificar $\mathfrak{g}^*$ com o espaço vectorial das formas-1 invariantes à esquerda em G.
15. Se $\{X_1, \dots, X_m\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$ e $\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$ é a base dual, temos

$$d\omega^a = -C^a_{bc}\, \omega^b \otimes \omega^c = -\frac{1}{2} C^a_{bc}\, \omega^b \wedge \omega^c$$

(*equações de Maurer-Cartan*).
16. *Redução de Lie-Poisson:* $T^*G/G \simeq \mathfrak{g}^*$ com o parêntesis de Poisson definido por

$$\{F, H\}(\mu) = \langle \mu, [dF, dH] \rangle$$

para todo o $F, H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, onde $dF, dH \in \mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$. Introduzindo coordenadas $(p_1, \dots, p_m)$ em $\mathfrak{g}^*$ através de $\mu = p_a\omega^a$, temos

$$\{F, H\} = p_a C^a_{bc} \frac{\partial F}{\partial p_b} \frac{\partial H}{\partial p_c},$$

onde C^a_{bc} são as constantes de estrutura associadas à base dual $\{X_1, \dots, X_m\}$.

17. O isomorfismo vectorial $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$

para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$ satisfaz

$$\mathbf{\Omega}([A, B]) = \mathbf{\Omega}(A) \times \mathbf{\Omega}(B).$$

Portanto, $(\mathbb{R}^3, \times)$ é uma álgebra de Lie isomorfa a $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$.

18. Recordando que

$$T_S SO(3) = \{SA : A \in \mathfrak{so}(3)\} = (L_S)_* \, \mathfrak{so}(3),$$

podemos fazer a identificação

$$TSO(3) = \{(S, A) : S \in SO(3), A \in \mathfrak{so}(3)\} = SO(3) \times \mathfrak{so}(3),$$

ou, usando o isomorfismo $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$,

$$TSO(3) = \{(S, \mathbf{\Omega}) : S \in SO(3), \mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^3\} = SO(3) \times \mathbb{R}^3.$$

$SO(3)$ age em si próprio por multiplicação à esquerda; o levantamento desta acção para o fribrado tangente é dado por

$$R \cdot (S, \mathbf{\Omega}) = (L_R)_* \, (S, \mathbf{\Omega}) = (RS, \mathbf{\Omega}).$$

Consequentemente, o Lagrangeano do corpo rígido com um ponto fixo sem forças exteriores, $L = \frac{1}{2} \langle I\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega} \rangle$, é $SO(3)$-invariante. Notando que $\mathbf{\Omega}$ são coordenadas na fibra, e usando a usual identificação $\left(\mathbb{R}^3\right)^* \simeq \mathbb{R}^3$ através do produto interno Euclideano, podemos fazer a identificação

$$T^*SO(3) = \{(S, \mathbf{P}) : S \in SO(3), \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3\},$$

onde

$$\langle (S, \mathbf{P}), (S, \mathbf{\Omega}) \rangle = \langle \mathbf{P}, \mathbf{\Omega} \rangle.$$

A transformação de Legendre gerada pelo Lagrangeano do corpo rígido com um ponto fixo sem forças exteriores é $\mathbf{P} = I\mathbf{\Omega}$, pelo que o Hamiltoniano correspondente é $H = \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{P}, I^{-1}\mathbf{P} \right\rangle$. O levantamento da acção de $SO(3)$ em si próprio por multiplicação à esquerda para o fibrado cotangente é dado por

$$R \cdot (S, \mathbf{P}) = (L_{R^{-1}})^* \, (S, \mathbf{P}) = (RS, \mathbf{P}),$$

pelo que H é $SO(3)$-invariante. De acordo com o teorema da redução de Lie-Poisson, o seu fluxo pode ser estudado na variedade reduzida $T^*SO(3)/SO(3) \simeq \mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3$ com o parêntesis de Poisson

$$\{F, G\} = \langle \mathbf{P}, \nabla F \times \nabla G \rangle = \langle \mathbf{P} \times \nabla F, \nabla G \rangle.$$

Nesta variedade tem-se

$$X_H = \mathbf{P} \times \nabla H = \mathbf{P} \times \left(I^{-1}\mathbf{P} \right),$$

e o fluxo deste campo conduz exactamente às equações de Euler. A função $\mathbf{P}^2$ é claramente uma função de Casimir, e as suas superfícies de nível são as folhas simplécticas de $(\mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\})$. Finalmente, a aplicação momento $\mathbf{J} : T^*SO(3) \to \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)^*$ para a acção de $SO(3)$ em $T^*SO(3)$ é $\mathbf{J}(S, \mathbf{P}) = S\mathbf{P} = \mathbf{p}$. Recorde-se que, uma vez que H é $SO(3)$-invariante, esta função é conservada pelo fluxo de H em $T^*SO(3)$.

VII. Sistemas Completamente Integráveis

1. Dada uma variedade simpléctica (M, ω) de dimensão $2n$, definimos o *Hamiltoniano* como uma função fixa $H \in C^\infty(M)$ fixa cujo fluxo Hamiltoniano desejamos estudar.
2. $F \in C^\infty(M)$ diz-se um *primeiro integral* se $\{H, F\}$=0.
3. Se $F, G \in C^\infty(M)$ são primeiros integrais, então $\{F, G\}$ é ainda um primeiro integral.
4. $F_1, \ldots, F_m \in C^\infty(M)$ dizem-se
   (i) *em involução* se $\{F_i, F_j\} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, m)$;
   (ii) *independentes* em $p \in M$ se $(dF_1)_p, \ldots, (dF_m)_p \in T_p^*M$ são covectores linearmente independentes.
5. Se $F_1, \ldots, F_m \in C^\infty(M)$ estão em involução e são independentes nalgum ponto $p \in M$ então $m \leq n$.
6. (M, ω, H) diz-se *completamente integrável* se existem n primeiros integrais $F_1, \ldots, F_n$ em involução independentes num aberto denso $U \subset M$.
7. Um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ diz-se *completo* se o seu fluxo Φ_t^X está definido para todo o $t \in \mathbb{R}$.
8. Se M, N são variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ é de classe C^∞ então $p \in M$ diz-se um *ponto regular* de f se $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ é sobrejectiva. Um ponto $q \in N$ diz-se um *valor regular* se todos os pontos de $f^{-1}(q)$ são pontos regulares de f, caso em que $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade de M de dimensão $\dim M - \dim N$.
9. Se o grupo de Lie G age na variedade diferenciável M, a acção diz-se
   (i) *transitiva* se para quaisquer pontos $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$;
   (ii) *localmente livre* se para todo o $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $V \subset G$ do elemento neutro $e \in G$ tal que $g \cdot p \neq p$ para todo o $g \in V \setminus \{e\}$. Se $\dim G = \dim M$, esta condição é equivalente à condição de para todo o $p \in M$ a aplicação $g \mapsto g \cdot p$ ser um difeomorfismo local na identidade.
10. Seja (M, ω, H) um sistema completamente integrável com primeiros integrais $F_1, \ldots, F_n$ em involução, independentes no aberto denso $U \subset M$ e tais que $X_{F_1}, \ldots, X_{F_n}$ são completos em U. Então o conjunto

$$M_{\mathbf{f}} = \{p \in U : F_1(p) = f_1, \ldots, F_n(p) = f_n\} \neq \varnothing \quad (\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n)$$

   é uma subvariedade de dimensão n, invariante para o fluxo Hamiltoniano de H, na qual se encontra definida uma acção de $\mathbb{R}^n$ localmente livre e transitiva em cada componente conexa.
11. Dado $p \in M_{\mathbf{f}}$, o *subgrupo de isotropia* de p é

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : \Phi_{\mathbf{t}}(p) = p\} \subset \mathbb{R}^n$$

   (onde $\Phi : \mathbb{R}^n \times M_{\mathbf{f}} \to M_{\mathbf{f}}$ designa a acção de $\mathbb{R}^n$ em $M_{\mathbf{f}}$).
12. O subgrupo de isotropia de p é um subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$.
13. Seja Γ um subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$. Então existem $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vectores linearmente independentes $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tais que $\Gamma = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

14. Seja $M_{\mathbf{f}}^p$ a componente conexa de $p \in M_{\mathbf{f}}$. Então $M_{\mathbf{f}}^p$ é difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde k é o número de geradores do subgrupo de isotropia de p. Em particular, se $M_{\mathbf{f}}^p$ é compacta, então é difeomorfa ao toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. (Assumiremos daqui em diante que este é de facto o caso).

15. Seja (M, ω) um variedade simpléctica. Uma subvariedade $N \subset M$ diz-se *isotrópica* se $\omega|_N = 0$. Se $N \subset M$ é isotrópica então $\dim N \leq n = \frac{1}{2} \dim M$. Se $N \subset M$ é isotrópica e $\dim N = n$ então N diz-se uma *subvariedade Lagrangeana*.

16. *Teorema da Vizinhança Lagrangeana:* Se $N \subset M$ é uma subvariedade Lagrangeana compacta então existe um vizinhança aberta de N que é simplectomorfa a uma vizinhança aberta da secção nula em T^*N, sendo N identificada com a secção nula.

17. $M_{\mathbf{f}}^p$ é uma subvariedade Lagrangeana compacta de M.

18. *Teorema de Arnold-Liouville:* Seja (M, ω, H) um sistema completamente integrável com $\dim M = 2n$ e $F_1, \ldots, F_n \in C^\infty(M)$ primeiros integrais em involução independentes no aberto denso $U \subset M$. Se as componentes conexas das superfícies de nível de $(F_1, \ldots, F_n)$ em U são compactas então são toros n-dimensionais, invariantes para o fluxo de X_H. É possível escolher coordenadas de Darboux $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n, I_1, \ldots, I_n)$ numa vizinhança de qualquer um destes toros invariantes (*coordenadas acção-ângulo*) tais que $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ são coordenadas naturais $(\operatorname{mod} 2\pi)$ nos toros (*coordenadas ângulo*), e $(I_1, \ldots, I_n)$, dadas por

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \theta$$

(onde γ_i é o gerador da homologia-1 do toro associado a φ^i e θ é o potencial simpléctico, $d\theta = \omega$) são constantes em cada toro (*coordenadas acção*). Em particular, nestas coordenadas $H = H(I_1, \ldots, I_n)$, e portanto

$$X_H = \omega^i(I_1, \ldots, I_n) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

com $\omega^i = \frac{\partial H}{\partial I_i}$; por outras palavras, o fluxo hamiltoniano de X_H nestas coordenadas é dado por

$$\Phi_t^{X_H}(\varphi^1, \ldots, \varphi^n, I_1, \ldots, I_n) = (\varphi^1 + \omega^1 t, \ldots, \varphi^n + \omega^n t, I_1, \ldots, I_n).$$

19. A construção das variáveis acção-ângulo num sistema completamente integrável só envolve operações "algébricas" (inversão de funções) e "quadraturas" (cálculo de integrais de funções conhecidas). Dado que uma vez encontradas as coordenadas acção-ângulo o cálculo do fluxo de X_H é trivial, diz-se que qualquer sistema completamente integrável é "solúvel por quadraturas" (daqui a origem da designação "completamente integrável").

20. Sejam $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \mod 2\pi$ coordenadas naturais no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ e $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \ldots, \omega^n) \in \mathbb{R}^n$. O fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ dado por

$$\Phi_t(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t$$

diz-se o *fluxo linear* no toro com frequências $\omega^1, \ldots, \omega^n$.

21. As frequências $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$ dizem-se *independentes* se são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, i.e., se $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$ para todo o $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

22. Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ integrável à Riemann. A sua *média espacial* é o número real

$$\overline{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{\varphi}) d^n \varphi$$

e a sua *média temporal* é a função

$$f^*(\boldsymbol{\varphi}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t) dt$$

(definida no conjunto dos pontos $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^n$ para os quais o limite existe).

23. *Teorema Ergódico:* Se as frequências $\boldsymbol{\omega}$ são independentes, a média temporal existe para todo o $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^n$ e
$$f^*(\boldsymbol{\varphi}) = \overline{f}.$$

24. Se as frequências $\boldsymbol{\omega}$ são independentes então $\{\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t\}_{t \geq 0}$ é denso no toro para todo o $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^n$.

25. Se as frequências $\boldsymbol{\omega}$ são independentes e $n \geq 2$ então $\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t$ não é periódico.

26. Seja (M, ω, H) um sistema completamente integrável satisfazendo as condições do Teorema de Arnold-Liouville. H diz-se *não-degenerado* se

$$\det \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial I_j} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right) \neq 0$$

(i.e., se localmente as frequências $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ parametrizam os toros invariantes).

27. Seja (M, ω, H) um sistema completamente integrável satisfazendo as condições do Teorema de Arnold-Liouville. Uma vez que localmente os toros invariantes são parametrizados pelas coordenadas acção $(I_1, \dots, I_n)$, podemos pensar no conjunto de todos os toros invariantes como uma variedade diferenciável de dimensão n. Se H é não-degenerado, então
    (i) Quase todos os toros invariantes possuem frequências independentes;
    (ii) Se $n \geq 2$ então o conjunto dos toros invariantes que *não* possuem frequências independentes é denso no conjunto de todos os toros invariantes.

28. *Teorema KAM (Komolgorov-Arnold-Moser):* Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ e $H_0 \in C^\infty(M)$ completamente integrável e não-degenerado (portanto as frequências $(\omega^1, \dots, \omega^n) = \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_1}, \dots, \frac{\partial H_0}{\partial I_n} \right)$ parametrizam os toros invariantes). Dados $H_1 \in C^\infty(M)$, $H = H_0 + \varepsilon H_1$ e $\nu > n - 1$, existe $\mu = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ tal que numa vizinhança de cada toro invariante de H_0 cujas frequências satisfazem

$$|\mathbf{k} \cdot \omega| > \mu \|\mathbf{k}\|^{-\nu}$$

para todo o $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ existe um toro invariante de H com as mesmas frequências. Em particular, a fracção dos toros invariantes destruidos pela perturbação é $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ (no sentido da medida de Lebesgue nas frequências).

VIII. Hamiltonianos Dependentes do Tempo e Equação de Hamilton-Jacobi

1. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica. O *fluxo Hamiltoniano* de $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ é dado (em $M \times \mathbb{R}$) pelas *linhas de vorticidade* de $\omega - dH \wedge dt$, i.e., pelas curvas integrais da distribuição $\ker(\omega - dH \wedge dt)$.
2. O fluxo Hamiltoniano de $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ é por simplectomorfismos.
3. *Redução no Tempo:* Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$, $H \in C^\infty(M)$ um Hamiltoniano independente do tempo, $h \in \mathbb{R}$ um valor regular de H. Se $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ são coordenadas de Darboux tais que localmente $H^{-1}(h)$ é dado por $p_1 = p_1(q^1, \ldots, q^n, p_2, \ldots, p_n)$ com $(q^1, \ldots, q^n, p_2, \ldots, p_n) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times U$, então o fluxo Hamiltoniano de H em $H^{-1}(h)$ é localmente uma reparametrização do fluxo Hamiltoniano de $K \in C^\infty(]-\varepsilon, \varepsilon[\times U)$ dado por
$$K(q^2, \ldots, q^n, p_2, \ldots, p_n, \tau) = -p_1(\tau, q^2, \ldots, q^n, p_2, \ldots, p_n)$$
(visto como um Hamiltoniano dependente do tempo na variedade simpléctica $(U, dp_2 \wedge dq^2 + \ldots + dp_n \wedge dq^n)$.
4. A equação diferencial parcial
$$H\left(q^1, \ldots, q^n, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$
diz-se a *equação de Hamilton-Jacobi*. Uma *solução completa* desta equação é uma solução $S(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$ dependendo de n parâmetros $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que
$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial \alpha_j}\right) \neq 0.$$
5. Localmente a equação de Hamilton-Jacobi admite sempre soluções completas. Uma solução completa determina o fluxo Hamiltoniano de H mediante
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$$
$$\beta^i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$$
(onde $(\beta^1, \ldots, \beta^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ são constantes).
6. Se H não depende do tempo, podemos tomar
$$S(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) = W(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \alpha_1 t,$$
onde W satisfaz
$$H\left(q^1, \ldots, q^n, \frac{\partial W}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q^n}\right) = \alpha_1.$$
As coordenadas $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definidas por
$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$
$$\xi^i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$
são coordenadas de Darboux, e nestas coordenadas
$$H(\xi^1, \ldots, \xi^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1.$$