6^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

4 de Junho de 2003

1. Considere uma superfície de revolução $Q \subset \mathbb{R}^3$ descrita em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por
$$r = f(z)$$
onde $f :]z_-, z_+[\to \mathbb{R}^+$ é C^∞ e limitada.

   (a) Mostre que as geodésicas de Q são os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por
$$L(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\left((f(z))^2\dot{\theta}^2 + \left((f'(z))^2 + 1\right)\dot{z}^2\right).$$

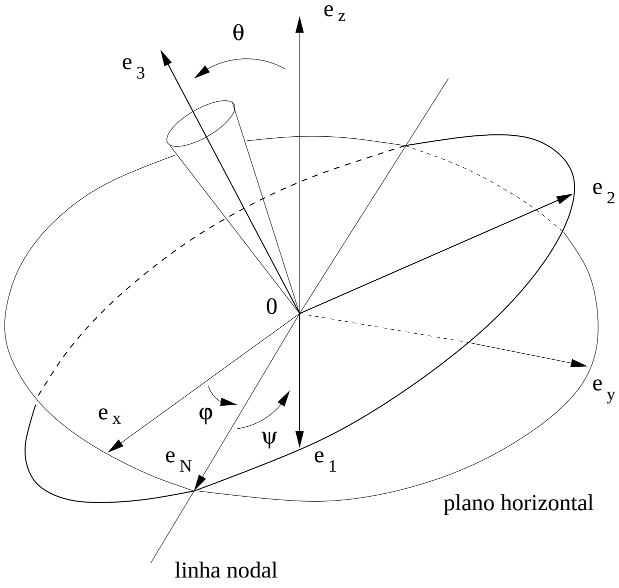
   (b) Mostre que as curvas $\theta =$ constante e as curvas $f'(z) = 0$ (caso existam) são (imagens de) geodésicas.

   (c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*Q \to \mathbb{R}$.

   (d) Mostre que H é completamente integrável.

   (e) Mostre que a projecção do toro/cilindro invariante
$$M_{(E,l)} = \{p_\theta d\theta + p_z dz \in T^*Q : H = E, p_\theta = l\} \qquad (E, l > 0)$$
em Q é dada em coordenadas locais por
$$f(z) \geq \frac{l}{\sqrt{2E}}.$$
Use este facto para concluir que se f tem um máximo estrito em $z = z_0$ então a geodésica (de imagem) $z = z_0$ é *estável*, i.e., geodésicas com condição inicial próxima de $(\theta_0, z_0, 1, 0) \in TQ$ mantêm-se próximas de $z = z_0$. Confirme a sua conclusão indicando um exemplo.

2. Recorde que o *pião de Lagrange* é descrito pelo Lagrangeano $L : TSO(3) \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por
$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - Mgl\cos\theta,$$
onde (θ, φ, ψ) são os ângulos de Euler, M é a massa do pião e l é a distância do seu centro de massa ao ponto fixo.



(a) Escreva as equações do movimento e determine os pontos de equilíbrio.

(b) Mostre que existem soluções tais que θ, $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ são constantes. Mostre ainda que no limite $|\dot{\varphi}| << |\dot{\psi}|$ (*pião veloz*) o pião *precessa* com velocidade angular

$$\dot{\varphi} \simeq \frac{Mgl}{I_3\dot{\psi}}$$

quando o seu movimento é descrito por uma destas soluções.

(c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*SO(3) \to \mathbb{R}$.

(d) Prove que H é completamente integrável.

(e) Mostre que as soluções encontradas na alínea (b) percorrem toros degenerados (de dimensão 2). Use este facto para argumentar que o resultado que obteve na alínea (b) permanece válido quando existe *nutação* (i.e., quando θ não é constante mas oscila com pequena amplitude em torno de uma posição de equilíbrio θ_0).