5^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

2 de Maio de 2003

1. $SO(2) \simeq S^1$ age em $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ mediante

$$\varphi \cdot (r, \theta) = (r, \theta + \varphi)$$

(onde (r, θ) são coordenadas polares em Q e θ, φ devem ser entendidos $\mod 2\pi$).

(a) Escreva a expressão da acção infinitesimal $X^\xi \in \mathcal{X}(Q)$ de $\xi \in \mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$.

(b) Determine a aplicação momento para o levantamento desta acção para o fibrado cotangente.

(c) Indique a expressão do tensor de Poisson de T^*Q com a estrutura simpléctica canónica nas coordenadas usuais $(r, \theta, p_r, p_\theta)$.

(d) Calcule o tensor de Poisson da variedade de Poisson $P = T^*Q/SO(2) \simeq \mathbb{R}^3$. Quais são as folhas simplécticas desta variedade? Indique uma função de Casimir não constante.

(e) Considere o Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r).$$

Mostre que se trata de um Lagrangeano hiper-regular e determine o correspondente Hamiltoniano $H : T^*Q \to \mathbb{R}$.

(f) Mostre que H é $SO(2)$-invariante, e determine o seu fluxo Hamiltoniano na variedade de Poisson reduzida P.

(g) Use o Teorema de Noether para indicar uma quantidade conservada pelo fluxo Hamiltoniano de H em T^*Q.

2. $SO(3)$ age em $\mathbb{R}^3$ por multiplicação à esquerda, $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \ni (S, \mathbf{x}) \mapsto S\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que a acção infinitesimal de $\mathfrak{so}(3)$ em $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$X^A_{\mathbf{x}} = \mathbf{\Omega}(A) \times \mathbf{x},$$

onde $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ é o isomorfismo vectorial definido por $A\mathbf{x} = \mathbf{\Omega}(A) \times \mathbf{x}$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, e fazemos a identificação usual $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$.

(b) Mostre que a aplicação momento para o levantamento desta acção para o fibrado cotangente é dada por

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{p})(A) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{\Omega}(A) \times \mathbf{x}) = \mathbf{\Omega}(A) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p})$$

(onde fazemos a identificação $T^*\mathbb{R}^3 \simeq T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mediante $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rfloor (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$).

(c) Conclua do Teorema de Noether que as trajectórias do sistema mecânico definido pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - U(\|\mathbf{x}\|)$$

preservam o *momento angular*

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}.$$

3. Recorde que o *plano hiperbólico* é simplesmente o semi-plano superior

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

com a métrica

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right).$$

Identificando $\mathbb{R}^2$ com o pano complexo $\mathbb{C}$, podemos escrever $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ e

$$g = \frac{1}{(\mathrm{Im}(z))^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

(a) Mostre que a aplicação

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

define uma acção do grupo

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 1 \right\}$$

no plano hiperbólico.

(b) Mostre que esta accção é por isometrias, i.e., mostre que

$$\frac{1}{(\mathrm{Im}(w))^2} dw \otimes d\overline{w} = \frac{1}{(\mathrm{Im}(z))^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

(c) Mostre que

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R}) : \alpha + \delta = 0 \right\}.$$

(d) Determine a acção infinitesimal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ no plano hiperbólico.

(e) Construa a aplicação momento para o levantamento desta acção para o fibrado cotangente.

(f) Justifique que o Lagrangeano geodésico $L : T\mathbb{H} \to \mathbb{R}$, dado por

$$L = \frac{1}{2y^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

é $SL(2, \mathbb{R})$-invariante. Use o Teorema de Noether para indicar três quantidades conservadas ao longo de qualquer geodésica.

(g) Use a alínea anterior para obter a equação geral $F(x, y) = 0$ de uma geodésica do plano hiperbólico.