

# 5ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

2 de Maio de 2003

1.  $SO(2) \simeq S^1$  age em  $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mediante

$$\varphi \cdot (r, \theta) = (r, \theta + \varphi)$$

(onde  $(r, \theta)$  são coordenadas polares em  $Q$  e  $\theta, \varphi$  devem ser entendidos  $\text{mod } 2\pi$ ).

- (a) Escreva a expressão da acção infinitesimal  $X^\xi \in \mathcal{X}(Q)$  de  $\xi \in \mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$ .
- (b) Determine a aplicação momento para o levantamento desta acção para o fibrado co-tangente.
- (c) Indique a expressão do tensor de Poisson de  $T^*Q$  com a estrutura simpléctica canónica nas coordenadas usuais  $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ .
- (d) Calcule o tensor de Poisson da variedade de Poisson  $P = T^*Q/SO(2) \simeq \mathbb{R}^3$ . Quais são as folhas simplécticas desta variedade? Indique uma função de Casimir não constante.
- (e) Considere o Lagrangeano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r).$$

Mostre que se trata de um Lagrangeano hiper-regular e determine o correspondente Hamiltoniano  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (f) Mostre que  $H$  é  $SO(2)$ -invariante, e determine o seu fluxo Hamiltoniano na variedade de Poisson reduzida  $P$ .
  - (g) Use o Teorema de Noether para indicar uma quantidade conservada pelo fluxo Hamiltoniano de  $H$  em  $T^*Q$ .
2.  $SO(3)$  age em  $\mathbb{R}^3$  por multiplicação à esquerda,  $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \ni (S, \mathbf{x}) \mapsto S\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Mostre que a acção infinitesimal de  $\mathfrak{so}(3)$  em  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$X_{\mathbf{x}}^A = \Omega(A) \times \mathbf{x},$$

onde  $\Omega : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é o isomorfismo vectorial definido por  $A\mathbf{x} = \Omega(A) \times \mathbf{x}$  para todo o  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , e fazemos a identificação usual  $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ .

- (b) Mostre que a aplicação momento para o levantamento desta acção para o fibrado cotangente é dada por

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{p})(A) = \mathbf{p} \cdot (\Omega(A) \times \mathbf{x}) = \Omega(A) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p})$$

(onde fazemos a identificação  $T^*\mathbb{R}^3 \simeq T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  mediante  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ ).

- (c) Conclua do Teorema de Noether que as trajectórias do sistema mecânico definido pelo Lagrangeano  $L : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - U(\|\mathbf{x}\|)$$

preservam o *momento angular*

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}.$$

3. Recorde que o *plano hiperbólico* é simplesmente o semi-plano superior

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

com a métrica

$$g = \frac{1}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

Identificando  $\mathbb{R}^2$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$ , podemos escrever  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  e

$$g = \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} dz \otimes d\bar{z}.$$

- (a) Mostre que a aplicação

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

define uma acção do grupo

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 1 \right\}$$

no plano hiperbólico.

- (b) Mostre que esta acção é por isometrias, i.e., mostre que

$$\frac{1}{(\text{Im}(w))^2} dw \otimes d\bar{w} = \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} dz \otimes d\bar{z}.$$

- (c) Mostre que

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \alpha + \delta = 0 \right\}.$$

- (d) Determine a acção infinitesimal de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  no plano hiperbólico.  
 (e) Construa a aplicação momento para o levantamento desta acção para o fibrado cotangente.  
 (f) Justifique que o Lagrangeano geodésico  $L : T\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$L = \frac{1}{2y^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

é  $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante. Use o Teorema de Noether para indicar três quantidades conservadas ao longo de qualquer geodésica.

- (g) Use a alínea anterior para obter a equação geral  $F(x, y) = 0$  de uma geodésica do plano hiperbólico.