4^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

10 de Abril de 2003

1. Uma partícula de massa $m > 0$ e carga $e \in \mathbb{R}$ num campo electromagnético estacionário é descrita pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + e\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}} - e\Phi = \frac{1}{2}m\dot{x}^i\dot{x}^i + eA^i\dot{x}^i - e\Phi,$$

onde $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ é o *potencial eléctrico* e $\mathbf{A} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ é o *potencial vector* do campo magnético.

   (a) Mostre que as equações do movimento são

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

   onde $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ é o *campo eléctrico* e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ é o *campo magnético*. (**Sugestão:** *Recorde as identidades* $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^i = \varepsilon_{ijk}X^jY^k$, $(\nabla \times \mathbf{X})^i = \varepsilon_{ijk}\partial_j X^k$ *e* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$).

   (b) Mostre que L é hiper-regular e determine a transformação de Legendre.

   (c) Determine o Hamiltoniano $H : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e escreva as equações de Hamilton.

2. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana, $\alpha \in \Omega^1(Q)$ e $U \in C^\infty(Q)$.

   (a) Mostre que os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(v_p) = \frac{1}{2}\langle v_p, v_p\rangle + v_p \rfloor \alpha - U(p)$$

   são os movimentos do sistema mecânico $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F})$, onde

$$\mathcal{F}(v_p) = -dU - v_p \rfloor d\alpha.$$

   (b) Mostre que a energia mecânica $E_m = K + U$ é conservada ao longo dos movimentos de $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F})$ (este sistema mecânico diz-se então *conservativo com termo magnético*).

   (c) Mostre que L é hiper-regular e determine a transformação de Legendre.

   (d) Determine o Hamiltoniano $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ e escreva as equações de Hamilton.

   (e) Mostre que $\tilde{\omega} = \omega + \pi^* d\alpha$ é uma forma simpléctica em T^*Q, onde $\omega \in \Omega^2(T^*Q)$ é a forma simpléctica canónica em T^*Q e $\pi : T^*Q \to Q$ é a projecção natural ($\tilde{\omega}$ diz-se uma *forma simpléctica com termo magnético*).

(f) Mostre que o fluxo Hamiltoniano da função $\tilde{H} \in C^\infty(T^*Q)$ relativo à forma simpléctica $\tilde{\omega}$, gerado pelo campo $\tilde{X}_{\tilde{H}}$ definido por

$$\tilde{X}_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} = -d\tilde{H}$$

é dado pelas equações

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial q^i} + \left(\dfrac{\partial \alpha_j}{\partial q^i} - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j \end{cases}$$

(g) A aplicação $F : T^*Q \to T^*Q$ dada por

$$F(\xi_p) = \xi_p - \alpha_p$$

é um difeomorfismo que preserva fibras. Mostre que F leva o fluxo Hamiltoniano de H relativo à forma simpléctica canónica ω no fluxo Hamiltoniano de $\tilde{H}$ relativo à forma simpléctica $\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{H}(\xi_p) = \frac{1}{2} \langle \xi_p, \xi_p \rangle + U(p).$$

Mostre ainda que as projecções dos dois fluxos em Q coincidem. Portanto o movimento de um sistema mecânico conservativo com termo magnético pode ser obtido introduzido o termo magnético tanto no Lagrangeano/Hamiltoniano como na forma simpléctica.

3. Mostre que qualquer variedade de dimensão 2 orientável possui uma estrutura simpléctica.

4. Determine o fluxo Hamiltoniano gerado pela restrição da função $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $H(x, y, z) = z$ à superfície orientável

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

com a estrutura simpléctica definida pela forma de volume usual.

5. Dê exemplos de:

   (a) Um campo localmente Hamiltoniano que não seja Hamiltoniano.

   (b) Uma variedade de Poisson que não seja simpléctica. Quais são as folhas simplécticas?

   (c) Uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$ e uma função *não constante* $C \in C^\infty(M)$ tal que $\{C, F\} = 0$ para todo o $F \in C^\infty(M)$. Será isto possível numa variedade simpléctica?