3^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

27 de Março de 2003

1. Determine os eixos principais de inércia, os correspondentes momentos principais de inércia e o elipsóide de inércia de:

   a) Um paralelepípedo homogéneo de massa M, lados $2a, 2b, 2c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem;

   b) Um elipsóide sólido homogéneo de massa M, semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem. (**Sugestão:** *comece por fazer a mudança de coordenadas* $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ *nos integrais a calcular*).

   Qual será a forma do elipsóide de inércia de um sólido Platónico homogéneo de centro na origem?

2. Considere um corpo rígido com um ponto fixo com (pelo menos) dois momentos principais de inércia idênticos, $I_1 = I_2$. Use as equações de Euler para mostrar que:

   a) A velocidade angular do corpo satisfaz a equação
   $$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{I_1}\mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$
   Em particular mostre que $\|\boldsymbol{\omega}\|$ e $\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p} \rangle$ são constantes. (**Sugestão:** *Comece por provar que para este corpo rígido se tem* $I\dot{\mathbf{\Omega}} = I_1\dot{\mathbf{\Omega}}$).

   b) Se $I_1 = I_2 = I_3$ então o corpo rígido roda em torno de um eixo fixo no espaço com velocidade angular constante (i.e., $\boldsymbol{\omega}$ é constante). Interprete este resultado usando o Teorema de Poinsot.

   c) No caso geral $I_1 = I_2 \neq I_3$, a equação (1) mostra que $\boldsymbol{\omega}$ *precessa* (i.e., roda) em torno de $\mathbf{p}$ com velocidade angular
   $$\boldsymbol{\omega}_{pr} = \frac{\mathbf{p}}{I_1}.$$
   Interprete este resultado com base no Teorema de Poinsot.

3. Considere um corpo rígido com um ponto fixo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ cujo movimento é descrito pelo caminho $S : \mathbb{R} \to SO(3)$. Sejam $\dot{S} = SA$ com $A \in \mathfrak{so}(3)$ e $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(A)$, onde $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ é o isomorfismo linear dado por $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$ para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$. Considere uma partícula de massa m cujo movimento **relativamente ao corpo rígido** é dado pelo caminho $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Suponha ainda que a força exterior sobre a partícula é $\mathbf{f}$, de modo que a equação do movimento é
$$m\frac{d^2}{dt^2}(S\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}.$$

a) Mostre que a equação do movimento se pode escrever

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}) - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\xi}$$

onde $\mathbf{f} = S\mathbf{F}$. (Os termos que surgem a seguir a $\mathbf{F}$ são as chamadas *forças de inércia*, e denominam-se, respectivamente, *força centrífuga*, *força de Coriolis* e *força de Euler*).

b) Justifique que se o corpo rígido é uma esfera homogénea que roda livremente no espaço (como por exemplo a Terra) então a força de Euler é nula. Porque é que uma peça de artilharia de longo alcance tem que ser apontada para a **esquerda** do alvo no hemisfério Norte?

c) Escreva a expressão da força $\mathbf{F}$ que é necessária para manter a partícula imóvel na superfície de um corpo rígido com $I_1 = I_2 \neq I_3$ que roda livremente no espaço.

4. **(Problema Braquistócrono)**: Uma partícula de massa m move-se sobre uma curva $y = y(x)$ sob a acção do campo gravitacional constante, $U = mgy$. A curva satisfaz $y(0) = y(d) = 0$ e $y(x) < 0$ para $0 < x < d$.

a) Supondo que a partícula é largada da origem com velocidade nula, mostre que a norma da sua velocidade é

$$v = \sqrt{-2gy}.$$

Conclua que o tempo que a partícula demora a viajar entre a origem e o ponto $(d, 0)$ é

$$S = \int_0^d \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} dx = (2g)^{-\frac{1}{2}} \int_0^d (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} (-y)^{-\frac{1}{2}} dx$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$.

b) Escreva uma equação diferencial para a curva $y = y(x)$ que leva a partícula a viajar entre os dois pontos em tempo mínimo. Mostre que esta equação pode ser reduzida a

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1+y'^2\right) y\right] = 0.$$

c) Verifique que a solução da equação acima que satisfaz $y(0) = y(d) = 0$ é dada parametricamente por

$$\begin{cases} x = R\theta - R\operatorname{sen}\theta \\ y = -R + R\cos\theta \end{cases}$$

onde $d = 2\pi R$. (Esta curva chama-se uma *ciclóide*, e é a curva descrita por um ponto numa circunferência que roda sem escorregar sobre o eixo dos xx).

5. **(Corpo Pseudo-Rígido - Opcional)**: Recorde que a métrica do corpo rígido é a restrição a $SO(3)$ da métrica plana em $GL(3, \mathbb{R})$ dada por

$$\langle\langle \dot{S}_1, \dot{S}_2 \rangle\rangle = \operatorname{tr}\left(\dot{S}_1 J \dot{S}_2^{\,t}\right),$$

onde

$$J_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi^i \xi^j dm.$$

(a) Quais são as geodésicas da conexão de Levi-Civita associada a esta métrica? Será $(GL(3,\mathbb{R}), \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ *geodesicamente completa* (i.e., será que qualquer geodésica pode ser prolongada para todos os valores do parâmetro)?

(b) A *equação de Euler* e a *equação da continuidade* para um fluido incompressível com campo de velocidades $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ e pressão $p(t,\mathbf{x})$ são respectivamente

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p;\\ &\nabla\cdot\mathbf{u} = 0,\end{aligned}$$

onde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

designa o habitual vector de operadores do cálculo vectorial.

Dada uma geodésica $S : \mathbb{R} \to GL(3,\mathbb{R})$, definimos

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi}) = S(t)\boldsymbol{\xi}\\ &\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \dot{S}(t)\boldsymbol{\xi} = \dot{S}(t)S^{-1}(t)\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Mostre que o campo de velocidades assim definido satisfaz a equação de Euler (com $p = 0$), mas não a equação da continuidade.

(c) Seja $f : GL(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(S) = \det S$. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = \operatorname{cof}(S)_{ij}$$

(onde $\operatorname{cof}(S)$ designa a matriz dos cofactores de S), e que consequentemente

$$\frac{df}{dt} = \operatorname{cof}(S)_{ij}\dot{S}_{ij} = (\det S)(S^{-1})_{ji}\dot{S}_{ij} = (\det S)\operatorname{tr}(\dot{S}S^{-1}).$$

Conclua que se impusermos a restição $\det S(t) = 1$ então a equação da continuidade é satisfeita.

(d) Mostre que o Princípio de D'Alembert aplicado à restrição holónoma $SL(3,\mathbb{R}) \subset GL(3,\mathbb{R})$ equivale a considerar o sistema

$$\begin{cases}\mu\left(\ddot{S}\right) = \lambda(t)df\\ \det S = 1\end{cases}$$

Mostre que a equação do movimento pode ser reescrita como

$$\ddot{S} = \lambda\left(S^{-1}\right)^t J^{-1}.$$

(e) Mostre que as geodésicas de $(SL(3,\mathbb{R}), \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ fornecem soluções da equação de Euler com

$$p = -\frac{\lambda}{2}\mathbf{x}^t\left(S^{-1}\right)^t J^{-1}S^{-1}\mathbf{x}$$

que também satisfazem a equação da continuidade.

Observação: Mais geralmente, é possível interpretar a equação de Euler num domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ como um sistema mecânico no grupo dos difeomorfismos de U (que é um grupo de Lie de dimensão infinita). A equação da continuidade impõe a restrição holónoma correspondente ao subgrupo dos difeomorfismos que preservam o volume, e a pressão é essencialmente a força de reacção perfeita associada a esta restrição.