# $2^{\text{a}}$ ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

19 de Março de 2003

1. O *oscilador harmónico bidimensional* (em unidades apropriadas) é o sistema mecânico $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU\right)$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto Euclidiano usual e $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

   a) Escreva as equações do movimento do oscilador harmónico bidimensional e indique a solução geral destas equações.

   b) Use o Teorema de Jacobi para indicar uma métrica Riemanniana no disco

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

   cujas geodésicas são os movimentos de energia $E_m = \frac{1}{2}$ do oscilador harmónico bidimensional. Indique um círculo e uma elipse que sejam geodésicas desta métrica. Será $D$ isométrico a algum subconjunto de $S^2$ (com a métrica usual)?

2. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\nabla$ e $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita $D$.

   a) Mostre que se $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ e $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}(Q)$ são extensões arbitrárias de $X, Y$, então

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$$

   em $N$. (**Sugestão:** *Recorde que para cada ponto de $N$ existe uma vizinhança $U \subset Q$ e coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ tais que $N \cap U$ é dado por $x^{m+1} = \ldots = x^n = 0$, onde $m = \dim N$*).

   b) Mostre que

$$D_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^{\top}$$

   para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(N)$, onde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões quaisquer de $X, Y$ a $\mathcal{X}(Q)$ e $^{\top} : TQ|_N \to TN$ designa a projecção ortogonal.

   c) Mostre que a *segunda forma fundamental de $N$*

$$B(X,Y) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - D_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^{\perp}$$

   está bem definida, e que $B(X,Y)_p \in T_p^{\perp} N$ é uma função bilinear simétrica de $X_p, Y_p$ para todo o $p \in N$.

3. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e suponha que existe um plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ perpendicular a $S$. Seja $c : \mathbb{R} \to S \cap \pi$ um caminho tal que $\|\dot{c}(t)\| = 1$.
   (a) Mostre que $c$ é uma geodésica de $S$.
   (b) Use a alínea anterior para indicar geodésicas de uma superfície esférica, de uma superfície cónica e de um toro de revolução.
   (c) Mostre que para qualquer ponto $p$ de uma superfície esférica $S$ se tem que $B(v_p, v_p)$ aponta no mesmo sentido para todo o $v_p \in T_pS$ (*curvatura positiva*).
   (d) Indique um ponto $p$ do toro de revolução $T$ tal que $B(v_p, v_p)$ não aponte no mesmo sentido para todo o $v_p \in T_pT$ (*curvatura negativa*).

4. Escreva as equações do movimento de um *pêndulo esférico* de comprimento $l$ e massa $m$, i.e., de uma partícula de massa $m$ que se move sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ sob a acção do campo gravitacional constante. Existe alguma quantidade conservada além da energia? (**Sugestão:** *Use coordenadas esféricas $(\theta, \varphi)$ na superfície esférica e recorde que a energia potencial correspondente ao campo gravitacional constante é dada por $U(x, y, z) = mgz$, onde $g$ é a aceleração da gravidade*).

5. Mostre que existe um isomorfismo vectorial $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$
para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$.

6. Considere um corpo rígido cuja distribuição de massa da configuração de referência é dada pela medida $m$. Suponha que o centro de massa é o ponto $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, i.e.,
$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\xi} dm = \mathbf{0}.$$
Um *movimento* do corpo rígido é um caminho $(S, \mathbf{r}) : \mathbb{R} \to SO(3) \times \mathbb{R}^3$, de forma que cada ponto $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ descreve o caminho
$$\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = S(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{r}(t).$$
A *energia cinética* associada a este movimento é definida da forma natural,
$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle dm,$$
onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^3$. Mostre que
$$K = \frac{1}{2} M \langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle + \frac{1}{2} \langle\langle \dot{S}, \dot{S} \rangle\rangle,$$
onde $M = \int_{\mathbb{R}^3} dm$ é a massa total do corpo e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é a métrica invariante à esquerda definida pelo corpo rígido em $SO(3)$.

7. Considere um corpo rígido com um ponto fixo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ descrito pela medida $m$. Suponha que o eixo dos $zz$ é um *eixo de simetria* do corpo, i.e., suponha que $m$ é invariante para a função $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, -y, z)$. Mostre que $\mathbb{R}\mathbf{e}_z$ é um eixo principal de inércia, e que portanto o correspondente momento principal de inércia é
$$I_z = \int_{\mathbb{R}^3} \left(x^2 + y^2\right) dm.$$