1^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

18 de Março de 2003

1. Considere as coordenada locais (θ, φ) usuais em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas pela parametrização $\mathbf{g} :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

   (a) Determine a expressão nestas coordenadas da métrica Riemanniana induzida em S^2 pela métrica Euclidiana usual em $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcule os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita associados a estas coordenadas locais.

   (c) Mostre que o equador é (imagem de) uma geodésica.

   (d) Use o facto de que isometrias levam geodésicas em geodésicas para mostrar que as (imagens de) geodésicas são os círculos máximos. Indique um triângulo geodésico cujos ângulos internos somem $\frac{3\pi}{2}$ $(270°)$.

   (e) Seja $c : [0, 2\pi] \to S^2$ dado por $(\theta, \varphi) = (\theta_0, t)$, onde $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (portanto c não é uma geodésica). Seja V um campo vectorial paralelo ao longo de c tal que $V(0) = \frac{\partial}{\partial\theta}$. Calcule o ângulo pelo qual V é rodado quando regressa ao ponto inicial. (**Observação:** *O ângulo que calculou é exactamente o ângulo pelo qual o plano de oscilação do pêndulo de Foulcaut - i.e., um pêndulo suficientemente comprido e pesado para oscilar durante dias - roda ao longo de um dia num local à latitude* $\frac{\pi}{2} - \theta_0$; *a razão para isto é que o plano de oscilação do pêndulo tenta permanecer fixo em relação às estrelas à medida que a Terra roda sobre o seu eixo*).

   (f) Use a alínea anterior para provar que não existe nenhum aberto $U \subset S^2$ que seja isométrico a um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana.

2. Seja G o grupo das tranformações afins próprias de $\mathbb{R}$, i.e., das funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(t) = yt + x$$

   com $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ (onde a operação de grupo é a composição). Tomando $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ como coordenadas globais, induzimos uma estrutura diferenciável em G.

   (a) Escreva a expressão da operação de composição $\circ : G \times G \to G$ nestas coordenadas. Aproveite para mostrar que G com esta estrutura diferenciável é um grupo de Lie.

   (b) Determine a métrica invariante à esquerda induzida pelo produto interno Euclidiano

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

   em $\mathfrak{g} = T_{(0,1)}G$. (**Observação:** G munido desta métrica diz-se o *plano hiperbólico*).

(c) Calcule os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita associados a estas coordenadas.

(d) Mostre as curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ dadas nestas coordenadas por

$$\alpha(t) = \big(0, e^t\big)$$
$$\beta(t) = \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right)$$

são geodésicas. Caracterize os conjuntos $\alpha(\mathbb{R}), \beta(\mathbb{R})$.

(e) Use o facto de que isometrias levam geodésicas em geodésicas para determinar todas as (imagens de) geodésicas. Mostre que dados dois pontos $p, q \in G$ existe uma única geodésica que os contém.

(f) Dê exemplos de variedades Riemannianas contendo dois pontos pelos quais passem (i) infinitas geodésicas; (ii) zero geodésicas.

(g) Prove que não existe nenhum aberto $U \subset G$ que seja isométrico a um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana. (**Sugestão:** *Mostre que em qualquer vizinhança de qualquer ponto $p \in G$ existe um quadrilátero geodésico cujos ângulos internos somam menos que 2π*).

3. Em $\mathbb{R}^3$ com a métrica Euclidiana usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ introduzimos a conexão ∇ definida em coordenadas Cartesianas (x^1, x^2, x^3) por

$$\Gamma^i_{jk} = \omega \varepsilon_{ijk},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ e

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ se } (i,j,k) \text{ é uma permutação par de } (1,2,3) \\ -1 \text{ se } (i,j,k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1,2,3) \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Mostre que:

(a) ∇ é compatível com $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

(b) As geodésicas de ∇ são rectas;

(c) Se $\omega \neq 0$ a torsão de ∇ não é zero (portanto ∇ não é a conexão de Levi-Civita);

(d) A equação do transporte paralelo é

$$\dot{V}^i + \omega \varepsilon_{ijk} \dot{x}^j V^k = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{V}} + \omega \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

(onde $\times$ designa o produto externo usual em $\mathbb{R}^3$). Portanto um vector paralelamente transportado ao longo de uma recta roda em torno desta com velocidade angular $\omega \|\dot{\mathbf{x}}\|$.

4. Mostre que se $(q^1, \ldots, q^n)$ são coordenadas locais no espaço de configurações Q de um sistema mecânico então

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i.$$

onde $\mu : TQ \to T^*Q$ é o operador massa e $K : TQ \to \mathbb{R}$ é a energia cinética.