2º Exame de Mecânica Geométrica

21 de Julho de 2003 – 9 horas
Duração: 3h

1. Considere o semiplano superior $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ munido da métrica de Poincaré

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right).$$

As geodésicas são portanto as curvas de Euler-Lagrange do Lagrangeano $L : T\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2y^2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right).$$

(2 val.) (a) Mostre que L é hiper-regular e determine o correspondente Hamiltoniano $H : T^*\mathbb{H} \to \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Mostre que H é completamente integrável.

(2 val.) (c) Mostre que a projecção do conjunto invariante

$$M_{(E,l)} = \{p_x dx + p_y dy \in T^*\mathbb{H} : H = E, p_x = l\}$$

em $\mathbb{H}$ é dada em coordenadas locais por

$$l^2 y^2 \leq 2E.$$

Mostre ainda que se $E, l \neq 0$ então $M_{(E,l)}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

(2 val.) (d) Como sabe, $\mathbb{H}$ possui uma estrutura de grupo de Lie, dada pela operação

$$(x,y) \cdot (x',y') = (yx' + x, yy'),$$

para a qual a métrica de Poincaré é invariante à esquerda. Determine o levantamento para $T^*\mathbb{H}$ da acção de $\mathbb{H}$ em si próprio por translacções à esquerda, e verifique que este preserva o Hamiltoniano H.

(2 val.) (e) Mostre que as funções $F(x,y,p_x,p_y) = yp_x$ e $G(x,y,p_x,p_y) = yp_y$ são $\mathbb{H}$-invariantes, e aproveite para indicar a estrutura de Poisson quociente em $T^*\mathbb{H}/\mathbb{H}$. Será esta uma variedade simpléctica?

(2 val.) (f) Escreva a expressão da aplicação momento para a acção acima, e aproveite para indicar um outro primeiro integral I. Mostre que a projecção em $\mathbb{H}$ de uma geodésica para a qual $H = E$, $p_x = l$ e $I = m$ satisfaz a equação

$$l^2x^2 + l^2y^2 - 2lmx + m^2 = 2E.$$

Supondo $l \neq 0$, que curvas são estas?

(2 val.) (g) Escreva a equação de Hamilton-Jacobi correspondente ao Hamiltoniano H e indique uma solução completa a menos de quadraturas (i.e., cálculo de primitivas). (**Sugestão:** *Procure soluções da forma* $S(x, y, E, l, t) = w(y) + lx - Et$).

(2 val.) (h) Supondo $l \neq 0$, use a mudança de variável

$$y = \frac{\sqrt{2E}}{l} \frac{1}{\cosh u}$$

para escrever a solução completa que determinou na alínea anterior na forma

$$S = \sqrt{2E}(\tanh u - u) + lx - Et.$$

Verifique que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial E} &= \frac{1}{2E} \coth u; \\ \frac{\partial u}{\partial l} &= -\frac{1}{l} \coth u, \end{aligned}$$

e que portanto as soluções das equações de Hamilton se escrevem

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{2E}(t + \beta_E); \\ x &= \beta_l - \frac{\sqrt{2E}}{l} \tanh u; \\ y &= \frac{\sqrt{2E}}{l} \frac{1}{\cosh u}; \\ p_x &= l; \\ p_y &= l \sinh u \end{aligned}$$

(onde β_E, β_l são constantes).

(2 val.) 2. (a) Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, G um grupo de Lie que age em M por simplectomorfismos e cuja acção admite uma aplicação momento $J : M \to \mathfrak{g}^*$. Seja $F \in C^\infty(M)$ uma função G-invariante. Mostre que

$$\{\langle J, \xi \rangle, F\} = 0$$

para todo o $\xi \in \mathfrak{g}$. Mostre que em particular no caso em que $M = T^*SO(3)$ é o espaço de fase de um corpo rígido com um ponto fixo se tem

$$\{p_i, P_j\} = 0$$

onde $\mathbf{p}$ é o vector momento angular e $\mathbf{P}$ é o vector momento angular no referencial ligado ao corpo.

(2 val.) (b) Mostre que o *pião de Euler*, i.e., o corpo rígido com um ponto fixo na ausência de forças exteriores, é um sistema completamente integrável no caso em que todos os momentos de inércia coincidem. Quantas famílias independentes de toros invariantes existem neste caso? E se apenas dois dos momentos de inércia coincidirem?