1º Exame de Mecânica Geométrica

11 de Julho de 2003 – 9 horas
Duração: 3h

1. Em Relatividade Geral, o movimento de uma partícula no campo criado por uma massa $M > 0$ esfericamente simétrica é uma geodésica da variedade pseudo-Riemanniana (U, g), onde $U \subset \mathbb{R}^3$ é o aberto descrito em coordenadas cilíndricas (u, r, θ) por $r > 2M$ e

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du \otimes du + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$$

(a coordenada u diz-se a *coordenada tempo*, e não coincide em geral com o *tempo próprio* da partícula, i.e., o parâmetro afim t que parametriza a geodésica). O movimento é portanto determinado pelo Lagrangeano $L : TU \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(u, r, \theta, \dot{u}, \dot{r}, \dot{\theta}) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2,$$

(2 val.) (a) Mostre que L é hiper-regular e determine o correspondente Hamiltoniano $H : T^*U \to \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Mostre que H é completamente integrável.

(2 val.) (c) Mostre que existem órbitas circulares de raio r_0 para qualquer $r_0 > 2M$, com $H < 0$ para $r_0 > 3M$ (órbita com velocidade inferior à da luz), $H = 0$ para $r_0 = 3M$ (órbita de velocidade igual à da luz) e $H > 0$ para $r_0 < 3M$ (órbita de velocidade superior à da luz). Mostre ainda que os cilindros invariantes degenerados consistem exactamente nestas órbitas circulares.

(2 val.) (d) Mostre que a projecção do cilindro invariante

$$M_{(E,k,l)} = \{p_u du + p_r dr + p_\theta d\theta \in T^*U : H = E,\ p_u = k,\ p_\theta = l\}$$

em U é dada em coordenadas locais por

$$\frac{l^2}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} k^2 \leq 2E.$$

Use este facto para concluir que se $r_0 > 6M$ então a órbita circular de raio r_0 é estável.

(2 val.) (e) Mostre que as trajectórias com $H = -\frac{1}{2}$ parametrizadas pela coordenada tempo u são dadas pelo fluxo Hamiltoninano de

$$K(r, \theta, p_r, p_\theta) = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 {p_r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{{p_\theta}^2}{r^2}}.$$

Use a expansão binomial

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$$

para mostrar que no *limite Newtoniano*, correspondente a

$$p_r{}^2, \frac{p_\theta{}^2}{r^2}, \frac{M}{r} \ll 1$$

o Hamiltoniano K se escreve

$$K = 1 + \frac{p_r{}^2}{2} + \frac{p_\theta{}^2}{2r^2} - \frac{M}{r} + \dots$$

(reduzindo-se portanto ao familiar Hamiltoniano do problema de Kepler).

(2 val.) (f) Escreva a equação de Hamilton-Jacobi correspondente ao Hamiltoniano H e indique uma solução completa a menos de quadraturas (i.e., cálculo de primitivas). Determine deste modo a solução das equações de Hamilton a menos de quadraturas. (**Sugestão:** *Procure soluções da forma* $S(u, r, \theta, E, k, l, t) = w(r) + ku + l\theta - Et$).

2. Considere o sistema formado por N partículas de massas $m_1, \dots, m_N > 0$ movendo-se em $\mathbb{R}^3$ sob a acção de um potencial $U : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ que só depende das distâncias entre elas. O sistema é portanto descrito pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

onde $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ é o vector posição da partícula de massa m_i em $\mathbb{R}^3$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o produto interno Euclidiano (nesta questão não utilizamos a convenção de Einstein). O grupo Euclidiano especial $SE(3) = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ (i.e., o grupo das isometrias de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que preservam orientações) age em $\mathbb{R}^{3N}$ mediante

$$(S, \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = (S\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}, \dots, S\mathbf{r}_N + \mathbf{v})$$

($S \in SO(3)$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$), e o levantamento desta acção para o fibrado tangente preserva L.

(2 val.) (a) Determine a acção infinitesimal de $(A, \boldsymbol{\xi}) \in \mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3$. Usando o homomorfismo $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$, escreva a acção infinitesimal do correspondente elemento $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

(2 val.) (b) Use o Teorema de Noether para mostrar que o *momento linear total*

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

e o *momento angular total em relação à origem*

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

são conservados ao longo do movimento. Mostre ainda que o *centro de massa* do sistema, i.e., o ponto cujo vector posição é

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

se move com velocidade constante, onde $M = \sum_{i=1}^{N}$ é a *massa total* do sistema.

(2 val.) (c) Generalize o resultado da alínea anterior ao caso em que as partículas se movem numa variedade Riemanniana $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ qualquer, mostrando que a quantidade

$$J^Y = \sum_{i=1}^{N} m_i \langle \dot{c}_i, Y \rangle$$

é conservada para qualquer campo de Killing $Y \in \mathcal{X}(Q)$, onde $c_i : \mathbb{R} \to Q$ é a trajectória da partícula de massa m_i (um *campo de Killing* é simplesmente a acção infinitesimal de algum elemento da álgebra de Lie do grupo das isometrias de $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$).

(2 val.) 3. Dada uma variedade Riemanniana $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ compacta, sabe-se que existe sempre uma geodésica fechada, i.e., uma geodésica $c : \mathbb{R} \to Q$ com $\dot{c}(t) \neq 0$ tal que $c(0) = c(L)$ e $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$ para algum $L > 0$. Use este facto para mostrar que um corpo rígido com um ponto fixo movendo-se sob a acção de uma força conservativa determinada por uma dada função energia potencial $U \in C^\infty(SO(3))$ admite uma infinidade de movimentos periódicos. Indique uma tal família infinita de movimentos periódicos no caso em que a função potencial é nula.