

# 1º Exame de Mecânica Geométrica

11 de Julho de 2003 – 9 horas

Duração: 3h

1. Em Relatividade Geral, o movimento de uma partícula no campo criado por uma massa  $M > 0$  esfericamente simétrica é uma geodésica da variedade pseudo-Riemanniana  $(U, g)$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^3$  é o aberto descrito em coordenadas cilíndricas  $(u, r, \theta)$  por  $r > 2M$  e

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du \otimes du + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$$

(a coordenada  $u$  diz-se a *coordenada tempo*, e não coincide em geral com o *tempo próprio* da partícula, i.e., o parâmetro afim  $t$  que parametriza a geodésica). O movimento é portanto determinado pelo Lagrangeano  $L : TU \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$L(u, r, \theta, \dot{u}, \dot{r}, \dot{\theta}) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2,$$

- (2 val.) (a) Mostre que  $L$  é hiper-regular e determine o correspondente Hamiltoniano  $H : T^*U \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (2 val.) (b) Mostre que  $H$  é completamente integrável.
- (2 val.) (c) Mostre que existem órbitas circulares de raio  $r_0$  para qualquer  $r_0 > 2M$ , com  $H < 0$  para  $r_0 > 3M$  (órbita com velocidade inferior à da luz),  $H = 0$  para  $r_0 = 3M$  (órbita de velocidade igual à da luz) e  $H > 0$  para  $r_0 < 3M$  (órbita de velocidade superior à da luz). Mostre ainda que os cilindros invariantes degenerados consistem exactamente nestas órbitas circulares.
- (2 val.) (d) Mostre que a projecção do cilindro invariante

$$M_{(E,k,l)} = \{p_u du + p_r dr + p_\theta d\theta \in T^*U : H = E, p_u = k, p_\theta = l\}$$

em  $U$  é dada em coordenadas locais por

$$\frac{l^2}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} k^2 \leq 2E.$$

Use este facto para concluir que se  $r_0 > 6M$  então a órbita circular de raio  $r_0$  é estável.

- (2 val.) (e) Mostre que as trajectórias com  $H = -\frac{1}{2}$  parametrizadas pela coordenada tempo  $u$  são dadas pelo fluxo Hamiltoniano de

$$K(r, \theta, p_r, p_\theta) = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 p_r^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{p_\theta^2}{r^2}}.$$

Use a expansão binomial

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$$

para mostrar que no *limite Newtoniano*, correspondente a

$$p_r^2, \frac{p_\theta^2}{r^2}, \frac{M}{r} \ll 1$$

o Hamiltoniano  $K$  se escreve

$$K = 1 + \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{M}{r} + \dots$$

(reduzindo-se portanto ao familiar Hamiltoniano do problema de Kepler).

- (2 val.) (f) Escreva a equação de Hamilton-Jacobi correspondente ao Hamiltoniano  $H$  e indique uma solução completa a menos de quadraturas (i.e., cálculo de primitivas). Determine deste modo a solução das equações de Hamilton a menos de quadraturas. (**Sugestão:** Procure soluções da forma  $S(u, r, \theta, E, k, l, t) = w(r) + ku + l\theta - Et$ ).
2. Considere o sistema formado por  $N$  partículas de massas  $m_1, \dots, m_N > 0$  movendo-se em  $\mathbb{R}^3$  sob a acção de um potencial  $U : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$  que só depende das distâncias entre elas. O sistema é portanto descrito pelo Lagrangeano  $L : T\mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

onde  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  é o vector posição da partícula de massa  $m_i$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  designa o produto interno Euclidiano (nesta questão não utilizamos a convenção de Einstein). O grupo Euclidiano especial  $SE(3) = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$  (i.e., o grupo das isometrias de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  que preservam orientações) age em  $\mathbb{R}^{3N}$  mediante

$$(S, \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = (S\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}, \dots, S\mathbf{r}_N + \mathbf{v})$$

( $S \in SO(3)$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ), e o levantamento desta acção para o fibrado tangente preserva  $L$ .

- (2 val.) (a) Determine a acção infinitesimal de  $(A, \xi) \in \mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3$ . Usando o homomorfismo  $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ , escreva a acção infinitesimal do correspondente elemento  $(\Omega, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ .
- (2 val.) (b) Use o Teorema de Noether para mostrar que o *momento linear total*

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

e o *momento angular total em relação à origem*

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

são conservados ao longo do movimento. Mostre ainda que o *centro de massa* do sistema, i.e., o ponto cujo vector posição é

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$$

se move com velocidade constante, onde  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  é a *massa total* do sistema.

- (2 val.) (c) Generalize o resultado da alínea anterior ao caso em que as partículas se movem numa variedade Riemanniana  $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  qualquer, mostrando que a quantidade

$$J^Y = \sum_{i=1}^N m_i \langle \dot{c}_i, Y \rangle$$

é conservada para qualquer campo de Killing  $Y \in \mathcal{X}(Q)$ , onde  $c_i : \mathbb{R} \rightarrow Q$  é a trajectória da partícula de massa  $m_i$  (um *campo de Killing* é simplesmente a acção infinitesimal de algum elemento da álgebra de Lie do grupo das isometrias de  $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ).

- (2 val.) 3. Dada uma variedade Riemanniana  $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  compacta, sabe-se que existe sempre uma geodésica fechada, i.e., uma geodésica  $c : \mathbb{R} \rightarrow Q$  com  $\dot{c}(t) \neq 0$  tal que  $c(0) = c(L)$  e  $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$  para algum  $L > 0$ . Use este facto para mostrar que um corpo rígido com um ponto fixo movendo-se sob a acção de uma força conservativa determinada por uma dada função energia potencial  $U \in C^\infty(SO(3))$  admite uma infinidade de movimentos periódicos. Indique uma tal família infinita de movimentos periódicos no caso em que a função potencial é nula.