Exame de Mecânica Geométrica (para praticar)

11 de Julho de 2003 – 9 horas
Duração: 3h

1. Considere uma partícula movendo-se num campo central em $\mathbb{R}^2$, descrita em coordenadas polares (r, θ) pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - U(r),$$

onde U é uma função de classe C^∞.

(2 val.) (a) Mostre que L é hiper-regular e determine o correspondente Hamiltoniano $H : T^*\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Mostre que H é completamente integrável.

(2 val.) (c) Mostre que existem órbitas circulares de raio r_0 sempre que $U'(r_0) > 0$. Mostre ainda que os toros invariantes degenerados consistem exactamente nestas órbitas circulares.

(2 val.) (d) Mostre que a projecção do toro/cilindro invariante

$$M_{(E,l)} = \left\{ p_r dr + p_\theta d\theta \in T^*\mathbb{R}^2 : H = E, p_\theta = l \right\}$$

em $\mathbb{R}^2$ é dada em coordenadas locais por

$$U(r) + \frac{l^2}{2r^2} \leq E.$$

Use este facto para concluir que se

$$U''(r_0) + \frac{3U'(r_0)}{r_0} > 0$$

então a órbita circular de raio r_0 é estável.

(2 val.) (e) Supondo que a condição acima se verifica, sabemos que para

$$l^2 = {r_0}^3 U'(r_0)$$

e E suficientemente próximo de

$$E_0 = \frac{1}{2}r_0 U'(r_0) + U(r_0)$$

o conjunto $M_{(E,l)}$ é um toro, cuja projecção em $\mathbb{R}^2$ é uma coroa circular. Sendo γ_r e γ_θ geradores da homologia do toro que se projectam em curvas $\theta =$ constante e $r =$ constante, mostre que

$$I_\theta = l;$$
$$2\pi I_r = 2\int_{r_-}^{r_+} \sqrt{2E - 2U(r) - \frac{l^2}{r^2}}dr,$$

onde $r_- < r_0 < r_+$ são os zeros da função $2E - 2U(r) - \frac{l^2}{r^2}$ mais próximos de r_0. Conclua que $\lim_{E\to E_0} I_r = 0$.

(2 val.) (f) O *problema de Kepler* corresponde a escolher

$$U(r) = -\frac{M}{r}.$$

Mostre que para este problema existem órbitas circulares estáveis de raio r_0 para todos os valores de $r_0 > 0$. Mostre ainda que a função $H(I_r, I_\theta)$ satisfaz

$$H(0, I_\theta) = -\frac{M^2}{2{I_\theta}^2}.$$

(2 val.) (g) Usando o facto de que para o problema de Kepler as frequências ω^r e ω^θ do fluxo linear nos toros invariantes são iguais, mostre que

$$H(I_r, I_\theta) = -\frac{M^2}{2(I_r + I_\theta)^2}.$$

2. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, G um grupo de Lie que age em M por simplectomorfismos e cuja acção admite uma aplicação momento $J : M \to \mathfrak{g}^*$. É possível provar que J é *infinitesimalmente equivariante*, i.e., que

$$\{\langle J, \xi\rangle, \langle J, \eta\rangle\} = \langle J, [\xi, \eta]\rangle$$

para todo o $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

(2 val.) (a) Mostre que no caso em que $M = T^*SO(3)$ é o espaço de fase de um corpo rígido com um ponto fixo, a identidade acima se escreve

$$\{\langle \mathbf{p}, \mathbf{\Omega}_1\rangle, \langle \mathbf{p}, \mathbf{\Omega}_2\rangle\} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{\Omega}_2\rangle,$$

onde $\mathbf{p}$ é o vector momento angular, $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot]) \simeq (\mathbb{R}^3, \times)$ é a identificação usual e $\mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3$ através da métrica invariante à esquerda que define o corpo rígido. Mostre ainda que escrevendo $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ se tem

$$\{p_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k.$$

(2 val.) (b) Mostre que o *pião de Euler*, i.e., o corpo rígido com um ponto fixo na ausência de forças exteriores, é um sistema completamente integrável (suponha que nem todos os momentos principais de inércia coincidem).

(2 val.) 3. Determine o fluxo Hamiltoniano correspondente a uma partícula no campo gravitacional constante, descrita pelo Hamiltoniano

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + gx$$

resolvendo a correspondente equação de Hamilton-Jacobi.