Resolução Sumária da
7^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

30 de Abril de 2002

1. Recorde que a energia cinética de uma partícula de massa m restrita a mover-se sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ é dada em coordenadas esféricas (θ, φ) por

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right).$$

Suponha que não existem forças exteriores.

a) Usando a quantidade conservada
$$P_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}},$$
é possível reduzir as equações do movimento a um sistema mecânico de dimensão 1 na variável θ. Determine a energia potencial efectiva $\tilde{U}(\theta)$ resultante desta redução (dita a *energia potencial centrífuga*).

b) Mostre que a única solução não trivial das equações do movimento com θ constante ocorre para $\theta = \frac{\pi}{2}$. O que significa geometricamente este resultado?

c) Calcule a frequência ω das oscilações de θ para movimentos próximos de $\theta = \frac{\pi}{2}$ com o mesmo valor de P_φ. Qual a relação entre os valores de ω e de $\dot{\varphi}$ no movimento não perturbado (i.e., com $\theta = \frac{\pi}{2}$)? Qual o significado geométrico deste resultado?

Resolução: Uma vez que tanto a energia cinética como

$$P_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}$$

são conservadas, concluimos que θ deve variar no tempo de forma a que a quantidade

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{P_\varphi^2}{2 m l^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

seja conservada, i.e., deve variar como no sistema mecânico unidimensional (fictício) com energia cinética efectiva

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

e energia potencial efectiva

$$\tilde{U} = \frac{P_\varphi^2}{2 m l^2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Supondo $P_\varphi \neq 0$ ($P_\varphi = 0$ conduziria à solução trivial com θ e φ constantes), os movimentos com θ constante são dados pelos pontos de equilíbrio do sistema unidimensonal fictício, i.e., pelas soluções de

$$\tilde{U}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{P_\varphi^2 \cos\theta}{ml^2 \operatorname{sen}^3\theta} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Uma vez que não existem forças exteriores, sabemos que os movimentos do sistema mecânico deverão ser geodésicas da esfera; este resultado significa portanto que a única geodésica com θ constante é o equador. Temos

$$\tilde{U}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{P_\varphi^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{ml^2 \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{P_\varphi^2}{ml^2}$$

pelo que a frequência ω das oscilações de θ para movimentos próximos de $\theta = \frac{\pi}{2}$ com o mesmo valor de P_φ é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{U}''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{ml^2}} = \frac{|P_\varphi|}{ml^2}.$$

Uma vez que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ se tem

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{ml^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{P_\varphi}{ml^2}$$

concluimos que

$$\omega = |\dot{\varphi}|.$$

Isto significa que o período das oscilações de θ para movimentos próximos de $\theta = \frac{\pi}{2}$ com o mesmo valor de P_φ coincide com o período do movimento ao redor do equador na solução não perturbada. Portanto se as duas soluções (perturbada e não perturbada) partem do mesmo ponto, reencontram-se exactamente no mesmo ponto após um intervalo de tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Considere agora o pêndulo esférico, obtido do sistema mecânico acima introduzindo a energia potencial

$$U(\theta, \varphi) = mgl\cos\theta.$$

Note que P_φ é ainda conservado neste sistema.

a) Determine a energia potencial efectiva $\tilde{U}(\theta)$.

b) Mostre que existem soluções com θ constante *sse* $\theta > \frac{\pi}{2}$. Interprete fisicamente este resultado.

Resolução: Repetindo o procedimento usual obtém-se

$$\tilde{U} = \frac{P_\varphi^2}{2ml^2 \operatorname{sen}^2\theta} + mgl\cos\theta.$$

Os pontos de equilíbrio do sistema unidimensonal fictício são dados por

$$\tilde{U}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{P_\varphi^2 \cos\theta}{ml^2 \operatorname{sen}^3\theta} - mgl\operatorname{sen}\theta = 0 \Leftrightarrow P_\varphi^2\cos\theta = -m^2 l^3 g \operatorname{sen}^4\theta.$$

Portanto só podem existir soluções para $\cos\theta < 0$, i.e., para $\theta > \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, dado $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, existe uma solução com $\theta = \theta_0$ para

$$P_\varphi^2 = -\frac{m^2 l^3 g \operatorname{sen}^4 \theta_0}{\cos\theta_0}.$$

Fisicamente, é natural esperar que este resultado ocorra: se a partícula se move num paralelo do hemisfério sul, a força centrífuga tende a fazer a partícula subir, contrabalançando assim a força gravitacional; se a partícula se tenta mover num paralelo do hemisfério norte, contudo, a força centrífuga tende a fazer a partícula descer, não sendo portanto possível contrabalançar a força gravitacional.