

7ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

30 de Abril de 2002

1. Recorde que a energia cinética de uma partícula de massa m restrita a mover-se sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ é dada em coordenadas esféricas (θ, φ) por

$$K = \frac{1}{2}ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right).$$

Suponha que não existem forças exteriores.

- a) Usando a quantidade conservada

$$P_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}},$$

é possível reduzir as equações do movimento a um sistema mecânico de dimensão 1 na variável θ . Determine a energia potencial efectiva $\tilde{U}(\theta)$ resultante desta redução (dita a *energia potencial centrífuga*).

- b) Mostre que a única solução não trivial das equações do movimento com θ constante ocorre para $\theta = \frac{\pi}{2}$. O que significa geometricamente este resultado?
- c) Calcule a frequência ω das oscilações de θ para movimentos próximos de $\theta = \frac{\pi}{2}$ com o mesmo valor de P_φ . Qual a relação entre os valores de ω e de $\dot{\varphi}$ no movimento não perturbado (i.e., com $\theta = \frac{\pi}{2}$)? Qual o significado geométrico deste resultado?
2. Considere agora o pêndulo esférico, obtido do sistema mecânico acima introduzindo a energia potencial

$$U(\theta, \varphi) = mgl \cos \theta.$$

Note que P_φ é ainda conservado neste sistema.

- a) Determine a energia potencial efectiva $\tilde{U}(\theta)$.
- b) Mostre que existem soluções com θ constante sse $\theta > \frac{\pi}{2}$. Interprete fisicamente este resultado.