Resolução Sumária da
6^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

24 de Abril de 2002

1. Determine os eixos principais de inércia, os correspondentes momentos principais de inércia e o elipsóide de inércia de:

   a) Um paralelepípedo homogéneo de massa M, lados $2a, 2b, 2c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem;

   b) Um elipsóide sólido homogéneo de massa M, semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem. (**Sugestão:** *comece por fazer a mudança de coordenadas* $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ *nos integrais a calcular*).

   Qual será a forma do elipsóide de inércia de um sólido Platónico homogéneo de centro na origem?

   Resolução: Uma vez que o volume do paralelpípedo é $8abc$, a sua densidade será

$$\rho = \frac{M}{8abc}.$$

Os eixos coordenados são obviamente eixos de simetria do paralelepípedo, e portanto eixos principais de inércia. Temos por exemplo

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left(x^2+y^2\right)\rho dz dy dx = \frac{M}{8abc}2c\left(2b\frac{2a^3}{3}+\frac{2b^3}{3}2a\right) \\ &= \frac{M}{3}\left(a^2+b^2\right). \end{aligned}$$

Consequentemente os restantes momentos principais de inércia são

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{M}{3}\left(b^2+c^2\right); \\ I_y &= \frac{M}{3}\left(a^2+c^2\right), \end{aligned}$$

e o elipsóide de inércia tem equação

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \Leftrightarrow \left(b^2+c^2\right)x^2 + \left(a^2+c^2\right)y^2 + \left(a^2+b^2\right)z^2 = \frac{3}{M}$$

(note-se que se por exemplo $a > b > c$ os semieixos correspondentes do elipsóide de inércia satisfazem a mesma relação).

O volume do elipsóide de semieixos a, b, c é

$$\int_{\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\leq 1\right\}} 1 dxdydz = \int_{\{u^2+v^2+w^2\leq 1\}} abcdudvdw = \frac{4\pi}{3}abc$$

(onde fizémos a mudança de coordenadas linear $(x, y, z) = (au, bv, cw)$, cujo Jacobiano é claramente abc). A densidade do elipsóide será então

$$\rho = \frac{3M}{4\pi abc}.$$

Os eixos coordenados são obviamente eixos de simetria do elipsóide, e portanto eixos principais de inércia. Temos por exemplo

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\leq 1\right\}} \left(x^2+y^2\right)\rho dxdydz = \int_{\{u^2+v^2+w^2\leq 1\}} \left(a^2u^2+b^2v^2\right)\rho abcdudvdw \\ &= \rho abc \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \left(a^2r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + b^2r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi\right) r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{3M}{4\pi}\left(a^2\pi\frac{4}{3}\frac{1}{5} + b^2\pi\frac{4}{3}\frac{1}{5}\right) = \frac{M}{5}\left(a^2+b^2\right). \end{aligned}$$

Consequentemente os restantes momentos principais de inércia são

$$I_x = \frac{M}{5}\left(b^2+c^2\right);$$
$$I_y = \frac{M}{5}\left(a^2+c^2\right),$$

e o elipsóide de inércia tem equação

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \Leftrightarrow \left(b^2+c^2\right)x^2 + \left(a^2+c^2\right)y^2 + \left(a^2+b^2\right)z^2 = \frac{5}{M}$$

(mais uma vez se por exemplo $a > b > c$ os semieixos correspondentes do elipsóide de inércia satisfazem a mesma relação).

O elipsóide de inércia de um sólido Platónico homogéneo de centro na origem tem que ser uma esfera: se um corpo rígido homogéneo de centro na origem é invariante por alguma rotação, o mesmo deve acontecer com o elipsóide de inércia. Ora todos os sólidos Platónicos são invariantes por rotações que deixam uma das suas faces invariante. O único elipsóide que é invariante sob todas estas rotações é a esfera. (No caso do cubo isto pode ser visto directamente da expressão do elipsóide de inércia de um paralelepípedo).

2. Considere um corpo rígido com um ponto fixo com (pelo menos) dois momentos principais de inércia idênticos, $I_1 = I_2$. Use as equações de Euler para mostrar que:

a) A velocidade angular do corpo satisfaz a equação

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{I_1}\mathbf{p}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Em particular mostre que $\|\boldsymbol{\omega}\|$ e $\langle\boldsymbol{\omega},\mathbf{p}\rangle$ são constantes. (**Sugestão:** *Comece por provar que para este corpo rígido se tem* $I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = I_1\dot{\boldsymbol{\Omega}}$).

b) Se $I_1 = I_2 = I_3$ então o corpo rígido roda em torno de um eixo fixo no espaço com velocidade angular constante (i.e., $\boldsymbol{\omega}$ é constante). Interprete este resultado usando o Teorema de Poinsot.

c) No caso geral $I_1 = I_2 \neq I_3$, a equação (1) mostra que $\boldsymbol{\omega}$ *precessa* (i.e., roda) em torno de $\mathbf{p}$ com velocidade angular
$$\boldsymbol{\omega}_{pr} = \frac{\mathbf{p}}{I_1}.$$
Interprete este resultado com base no Teorema de Poinsot.

Resolução: Das equações de Euler concluimos que se $I_1 = I_2$ então

$$I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 = 0 \Rightarrow \dot{\Omega}_3 = 0$$

e portanto

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = I_1\dot{\Omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\Omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\Omega}_3\mathbf{e}_3 = I_1(\dot{\Omega}_1\mathbf{e}_1 + \dot{\Omega}_2\mathbf{e}_2) = I_1\dot{\boldsymbol{\Omega}}.$$

A equação de Euler fica então

$$I_1\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{I_1}\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{d}{dt}(S\boldsymbol{\Omega}) = \dot{S}\boldsymbol{\Omega} + S\dot{\boldsymbol{\Omega}} = SA\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{I_1}S(\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}) = S(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{I_1}(S\mathbf{P}) \times (S\boldsymbol{\Omega}) \\ &= \frac{1}{I_1}\mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

Em particular,
$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\omega}\|^2 = 2\langle\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{I_1}\langle\mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle = 0$$
e
$$\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}\rangle = \langle\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{p}\rangle = \frac{1}{I_1}\langle\mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}\rangle = 0.$$
Se $I_1 = I_2 = I_3$ então
$$I\boldsymbol{\Omega} = I_1\boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \mathbf{P} = I_1\boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \mathbf{p} = I_1\boldsymbol{\omega},$$
pelo que
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{I_1}\mathbf{p}$$
é claramente constante. A condição $I_1 = I_2 = I_3$ corresponde ao elipsóide de inércia ser uma esfera, e o Teorema de Poinsot implica que esta esfera deve rodar sobre o eixo determinado por $\mathbf{p}$, pelo que a velocidade angular deve ser proporcional a $\mathbf{p}$.

No caso geral $I_1 = I_2 \neq I_3$, o elipsóide de inércia possui secção circular e o Teorema de Poinsot implica que o ponto de contacto com o plano perpendicular a $\mathbf{p}$ deve descrever uma circunferência nesse plano. Uma vez que o ponto de contacto e a origem definem o eixo de rotação, vemos que a velocidade angular deve rodar em torno do eixo definido por $\mathbf{p}$.