6^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

15 de Abril de 2002

1. Determine os eixos principais de inércia, os correspondentes momentos principais de inércia e o elipsóide de inércia de:

   a) Um paralelepípedo homogéneo de massa M, lados $2a, 2b, 2c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem;

   b) Um elipsóide sólido homogéneo de massa M, semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem. (**Sugestão:** *comece por fazer a mudança de coordenadas* $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ *nos integrais a calcular*).

   Qual será a forma do elipsóide de inércia de um sólido Platónico homogéneo de centro na origem?

2. Considere um corpo rígido com um ponto fixo com (pelo menos) dois momentos principais de inércia idênticos, $I_1 = I_2$. Use as equações de Euler para mostrar que:

   a) A velocidade angular do corpo satisfaz a equação

   $$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{I_1}\mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

   Em particular mostre que $\|\boldsymbol{\omega}\|$ e $\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p} \rangle$ são constantes. (**Sugestão:** *Comece por provar que para este corpo rígido se tem* $I\dot{\mathbf{\Omega}} = I_1\dot{\mathbf{\Omega}}$).

   b) Se $I_1 = I_2 = I_3$ então o corpo rígido roda em torno de um eixo fixo no espaço com velocidade angular constante (i.e., $\boldsymbol{\omega}$ é constante). Interprete este resultado usando o Teorema de Poinsot.

   c) No caso geral $I_1 = I_2 \neq I_3$, a equação (1) mostra que $\boldsymbol{\omega}$ *precessa* (i.e., roda) em torno de $\mathbf{p}$ com velocidade angular

   $$\boldsymbol{\omega}_{pr} = \frac{\mathbf{p}}{I_1}.$$

   Interprete este resultado com base no Teorema de Poinsot.