Resolução Sumária da
5^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

23 de Abril de 2002

1. Escreva as equações do movimento de um *pêndulo esférico* de comprimento l e massa m, i.e., de uma partícula de massa m que se move sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ sob a acção do campo gravitacional constante. Existe alguma quantidade conservada além da energia? (**Sugestão:** *Use coordenadas esféricas* (θ, φ) *na superfície esférica e recorde que a energia potencial correspondente ao campo gravitacional constante é dada por* $U(x, y, z) = mgz$*, onde* g *é a aceleração da gravidade*).

   Resolução: Uma vez a força de reacção (exercida pela haste do pêndulo) não é indicada, assumimos que esta satisfaz o princípio de D'Alembert. Sabemos então que os movimentos do pêndulo esférico são os movimentos do sistema mecânico $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, -dU|_N)$, onde

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = l^2\}$$

   e $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é a métrica induzida em N pela métrica da energia cinética de uma partícula de massa m em $\mathbb{R}^3$,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = m(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz).$$

   Portanto em coordenadas esféricas (θ, φ) temos

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = ml^2(d\theta \otimes d\theta + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi \otimes d\varphi),$$

   ou seja,

$$K = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

   A energia potencial restrita a N é dada em coordenadas esféricas por

$$U = mgl\cos\theta.$$

   Portanto as equações do movimento vêm

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial K}{\partial\theta} = -\frac{\partial U}{\partial\theta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) - ml^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = mgl\operatorname{sen}\theta$$
$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta$$

   e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial K}{\partial\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial\varphi} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(ml^2\operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}\right) = 0.$$

Desta equação é imediato que a quantidade

$$P_z = ml^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}$$

é constante ao longo do movimento (pode mostrar-se que P_z é a componente do momento angular da partícula segundo o eixo dos zz).

2. Mostre que existe um isomorfismo vectorial $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$

para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$.

Resolução: Se

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

é uma matriz anti-simétrica arbitrária então

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Portanto definindo

$$\mathbf{\Omega}(A) = (a, b, c)$$

vemos que

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$

para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$. A aplicação $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ assim definida é um isomorfismo vectorial, uma vez que é claramente linear e bijectiva.

É interessante notar que se $A, B \in \mathfrak{so}(3)$, com $\mathbf{\Omega}(A) = (a, b, c)$ e $\mathbf{\Omega}(B) = (\alpha, \beta, \gamma)$, então

$$\begin{aligned}
[A, B] &= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & b\alpha - a\beta & c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha & 0 & c\beta - b\gamma \\ a\gamma - c\alpha & b\gamma - c\beta & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}^{-1} \begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}^{-1}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{\Omega}([A, B]) = \mathbf{\Omega}(A) \times \mathbf{\Omega}(B).$$

Isto mostra que $(\mathbb{R}^3, \times)$ é uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$.

3. Seja C um corpo rígido com um ponto fixo $\mathbf{0} \in C$ e densidade $\rho : \overline{C} \to \mathbb{R}^+$. Suponha que o eixo dos zz é um *eixo de simetria* de C, i.e., suponha que em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para $\mathbb{R}^3$ se tem $(r, \theta, z) \in C$ *sse* $(r, \theta+\pi, z) \in C$ e $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta+\pi, z)$. Mostre que $\mathbb{R}\mathbf{e}_z$ é um eixo principal de inércia de C e que o correspondente momento principal de inércia é

$$I_z = \int_C [r(\boldsymbol{\xi})]^2 \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi.$$

Resolução: Basta notar que

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{e}_z) &= \int_C [\boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\xi})]\rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi \\
&= \int_C \{(r\cos\theta\mathbf{e}_x + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \times [\mathbf{e}_z \times (r\cos\theta\mathbf{e}_x + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z]\}\, \rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz \\
&= \int_C [(r\cos\theta\mathbf{e}_x + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \times (r\cos\theta\mathbf{e}_y - r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_x)]\, \rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz \\
&= \int_C \left(r^2\cos^2\theta\mathbf{e}_z + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\mathbf{e}_z - rz\cos\theta\mathbf{e}_x - rz\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{e}_y\right) \rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz \\
&= \int_C r^2\mathbf{e}_z\rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz = I_z\mathbf{e}_z,
\end{aligned}$$

onde

$$I_z = \int_C r^2\rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz = \int_C [r(\boldsymbol{\xi})]^2 \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi.$$

e onde usámos o facto de que a simetria de C em relação ao eixo dos zz implica que por exemplo

$$\begin{aligned}
&\int_C rz\cos\theta\rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz \\
&= \int_{\{0<\theta<\pi\}} rz\cos\theta\rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz + \int_{\{\pi<\theta<2\pi\}} rz\cos\theta\rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz \\
&= \int_{\{0<\theta<\pi\}} rz\cos\theta\rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz + \int_{\{\pi<\varphi+\pi<2\pi\}} rz\cos(\varphi+\pi)\rho(r,\varphi+\pi,z) r dr d\varphi dz \\
&= \int_{\{0<\theta<\pi\}} rz\cos\theta\rho(r,\theta,z) r dr d\theta dz - \int_{\{0<\varphi<\pi\}} rz\cos\varphi\rho(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz = 0
\end{aligned}$$

(e analogamente para o outro integral).