

## 5ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

9 de Abril de 2002

1. Escreva as equações do movimento de um *pêndulo esférico* de comprimento  $l$  e massa  $m$ , i.e., de uma partícula de massa  $m$  que se move sobre a superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$  sob a acção do campo gravitacional constante. Existe alguma quantidade conservada além da energia? (**Sugestão:** Use coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$  na superfície esférica e recorde que a energia potencial correspondente ao campo gravitacional constante é dada por  $U(x, y, z) = mgz$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade).
2. Mostre que existe um isomorfismo vectorial  $\Omega : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$A\xi = \Omega(A) \times \xi$$

para todo o  $\xi \in \mathbb{R}^3$  e  $A \in \mathfrak{so}(3)$ .

3. Seja  $C$  um corpo rígido com um ponto fixo  $\mathbf{0} \in C$  e densidade  $\rho : \overline{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Suponha que o eixo dos  $zz$  é um *eixo de simetria* de  $C$ , i.e., suponha que em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  para  $\mathbb{R}^3$  se tem  $(r, \theta, z) \in C$  sse  $(r, \theta + \pi, z) \in C$  e  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta + \pi, z)$ . Mostre que  $\mathbb{R}e_z$  é um eixo principal de inércia de  $C$  e que o correspondente momento principal de inércia é

$$I_z = \int_C [r(\xi)]^2 \rho(\xi) d^3\xi.$$