4^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

1 de Abril de 2002

1. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita D.

   a) Mostre que
   $$D_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^{\top}$$
   para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(N)$, onde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões quaisquer de X, Y a $\mathcal{X}(Q)$ e $^{\top} : TQ|_N \to TN$ designa a projecção ortogonal.

   b) Mostre que a *segunda forma fundamental de N*
   $$B(X,Y) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - D_X Y$$
   está bem definida, e que $B(X,Y)(p) \in T_p^{\perp} N$ é uma função bilinear simétrica de $X(p), Y(p)$ para todo o $p \in N$.

   c) Mostre ainda que se $Z : N \to T^{\perp} N$ é um campo vectorial normal a N então
   $$\langle B(X,Y), Z\rangle = -\langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

2. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$ a superfície esférica de raio $r \in \mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^3$ com a métrica induzida pela métrica Euclidiana usual. Mostre que são consequências imediatas do exercício anterior os seguintes factos:

   a) O caminho $q : \mathbb{R} \to S$ dado por
   $$q(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, 0)$$
   é uma geodésica;

   b) A aceleração $D_{\dot{p}} \dot{p}$ do caminho $p : \mathbb{R} \to S$ dado por
   $$p(t) = (r \operatorname{sen}\theta \cos t, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} t, r \cos\theta)$$
   (com $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$) aponta na direcção do pólo Norte $(0,0,r)$ (portanto p curva na direcção deste pólo);

   c) A segunda forma fundamental de S é dada por
   $$B(X,Y) = -\frac{1}{r} \langle\langle X, Y\rangle\rangle Z$$
   onde $Z : S \to T^{\perp} S$ é o vector normal unitário a S.