Resolução Sumária da
3^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

3 de Abril de 2002

1. O *oscilador harmónico bidimensional* (em unidades apropriadas) é o sistema mecânico $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU\right)$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto Euclidiano usual e $U:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

a) Escreva as equações do movimento do oscilador harmónico bidimensional e indique a solução geral destas equações.

b) Use o Teorema de Jacobi para indicar uma métrica Riemanniana no disco

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

cujas geodésicas são os movimentos de energia $E_m = \frac{1}{2}$ do oscilador harmónico bidimensional. Indique um círculo e uma elipse que sejam geodésicas desta métrica. Será D isométrico a algum subconjunto de S^2 (com a métrica usual)?

c) Podemos incluir atrito no oscilador harmónico bidimensional considerando a força exterior

$$\mathcal{F}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right) = -dU - kudx - kvdy$$

(onde $k > 0$ é uma constante). Escreva as equações do movimento deste novo sistema mecânico e mostre que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t\to+\infty} \dot{y}(t) = 0.$$

(**Sugestão:** *Calcule* $\dfrac{dE_m}{dt}$).

Resolução: A energia cinética é então

$$K = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + y^2\right)$$

e portanto as equações do movimento vêm

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \Leftrightarrow \ddot{x} = -x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial K}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \Leftrightarrow \ddot{y} = -y$$

que têm como solução geral

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cos t + \dot{x}_0 \operatorname{sen} t \\
y(t) &= y_0 \cos t + \dot{y}_0 \operatorname{sen} t.
\end{aligned}
$$

De acordo com o teorema de Jacobi, os movimentos do sistema mecânico com energia $E_m = \frac{1}{2}$ são geodésicas reparametrizadas da métrica

$$
2\left(\frac{1}{2} - U(x,y)\right)(dx \otimes dx + dy \otimes dy) = (1 - x^2 - y^2)\,(dx \otimes dx + dy \otimes dy)\,.
$$

no disco D. Os movimentos da forma

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cos t \\
y(t) &= \dot{y}_0 \operatorname{sen} t
\end{aligned}
$$

têm energia mecânica $E_m = \frac{1}{2}$ desde que

$$
x_0^2 + \dot{y}_0^2 = 1.
$$

Escolhendo $x_0 = \dot{y}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ obtemos um círculo; escolhendo $x_0 = \frac{4}{5}$, $\dot{y}_0 = \frac{3}{5}$ obtemos uma elipse. Estas curvas intersectam-se em 4 pontos distintos, e portanto não podem ser geodésicas de S^2 com a métrica usual (que se intersectam sempre em exactamente 2 pontos). Concluimos que D com a métrica de Jacobi não pode ser isométrico a um subconjunto de S^2 com a métrica redonda.

Finalmente, se incluimos atrito na força exterior temos

$$
\mathcal{F}\left(\dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x} - k\dot{x}\right)dx - \left(-\frac{\partial U}{\partial y} - k\dot{y}\right)dy = (-x - k\dot{x})\,dx + (-y - k\dot{y})\,dy
$$

e portanto as equações do movimento mudam para

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -x - k\dot{x} \\
\ddot{y} &= -y - k\dot{y}.
\end{aligned}
$$

Tem-se neste caso

$$
\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 + y^2\right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + x\dot{x} + y\dot{y} = -k\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \leq 0.
$$

Portanto $E_m(t)$ é uma função decrescente; como $E_m \geq 0$, concluimos que existe $\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} E_m(t)$. Uma vez que E_m é monótona, é fácil provar que

$$
\lim_{t\to+\infty} E_m(t) = \varepsilon \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{dE_m}{dt}(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = 0.
$$

Portanto o movimento aproxima-se do círculo $C \subset T\mathbb{R}^2$ dado em coordenadas locais por

$$
C = \left\{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) : \dot{x} = \dot{y} = 0, x^2 + y^2 = \varepsilon\right\},
$$

que deve então conter um subconjunto invariante. Como C está contido em $\dot{x} = \dot{y} = 0$, nesse conjunto invariante devemos ter $\ddot{x} = \ddot{y} = 0 \Rightarrow x = y = 0$, e portanto $\varepsilon = 0$. Concluimos que $\lim_{t\to+\infty} E_m(t) = 0$.