3^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

25 de Março de 2002

1. O *oscilador harmónico bidimensional* (em unidades apropriadas) é o sistema mecânico $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU\right)$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto Euclidiano usual e $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

   a) Escreva as equações do movimento do oscilador harmónico bidimensional e indique a solução geral destas equações.

   b) Use o Teorema de Jacobi para indicar uma métrica Riemanniana no disco

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

   cujas geodésicas são os movimentos de energia $E_m = \frac{1}{2}$ do oscilador harmónico bidimensional. Indique um círculo e uma elipse que sejam geodésicas desta métrica. Será D isométrico a algum subconjunto de S^2 (com a métrica usual)?

   c) Podemos incluir atrito no oscilador harmónico bidimensional considerando a força exterior

$$\mathcal{F}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right) = -dU - kudx - kvdy$$

   (onde $k > 0$ é uma constante). Escreva as equações do movimento deste novo sistema mecânico e mostre que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t\to+\infty} \dot{y}(t) = 0.$$

   (**Sugestão:** *Calcule* $\frac{dE_m}{dt}$).