Resolução Sumária da
2^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

9 de Maio de 2002

1. Considere as coordenada locais (θ, φ) usuais em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas pela parametrização $\mathbf{g} :]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta,\varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

   a) Determine a expressão nestas coordenadas da métrica Riemanniana induzida em S^2 pela métrica Euclidiana usual em $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcule os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita associados a estas coordenadas locais.

   c) Mostre que as geodésicas são círculos máximos (**Sugestão:** *note que pode sempre escolher as coordenadas por forma a que a condição inicial da geodésica satisfaça* $(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \left(\frac{\pi}{2},0,0,\dot{\varphi}_0\right)$).

   d) Seja $c : [0,2\pi] \to S^2$ dado por $(\theta,\varphi) = (\theta_0, t)$, onde $\theta_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (portanto c não é uma geodésica). Seja V um campo vectorial paralelo ao longo de c tal que $V(0) = \frac{\partial}{\partial\theta}$. Calcule o ângulo pelo qual V é rodado quando regressa ao ponto inicial. Será a conexão de Levi-Civita de S^2 com a métrica induzida uma conexão plana? (**Nota:** *O ângulo que calculou é exactamente o ângulo pelo qual o plano de oscilação do Pêndulo de Foulcaut - i.e., um pêndulo suficientemente comprido e pesado para oscilar durante dias - roda ao longo de um dia num local à latitude* $\frac{\pi}{2} - \theta_0$; *a razão para isto é que o plano de oscilação do pêndulo permanece fixo em relação às estrelas à medida que a Terra roda sobre o seu eixo*).

Resolução: Uma vez que $\frac{\partial}{\partial\theta}$ é simplesmente o vector velocidade da curva descrita em S^2 quando se faz variar θ mantendo φ constante, temos

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta)$$

e portanto

$$g_{\theta\theta} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle = 1.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\varphi} = (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0)$$

e portanto

$$g_{\varphi\varphi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\rangle = \operatorname{sen}^2\theta;$$
$$g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\rangle = 0.$$

Concluimos que a métrica induzida em S^2 pela métrica Euclidiana usual em $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$g = d\theta \otimes d\theta + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi \otimes d\varphi.$$

Portanto

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

e consequentemente

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \end{pmatrix}.$$

Os símbolos de Christoffel podem ser agora calculados: por exemplo

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta i} \left(\partial_\varphi g_{\varphi i} + \partial_\varphi g_{\varphi i} - \partial_i g_{\varphi\varphi} \right) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(0 + 0 - \partial_\theta \left(\operatorname{sen}^2\theta \right) \right) = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Dos oito símbolos de Chrisfoffel apenas três não se anulam: o que calculámos acima e

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \operatorname{cotg}\theta.$$

Usando estes símbolos podemos agora escrever as equações das geodésicas:

$$\ddot{\theta} + \Gamma^{\theta}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0;$$
$$\ddot{\varphi} + \Gamma^{\varphi}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi} + 2\operatorname{cotg}\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0.$$

Dada uma condição inicial para uma geodésica em S^2 (i.e., um vector tangente a S^2), podemos sempre escolher as coordenadas (θ, φ) de modo a que o vector seja $\dot{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial\varphi}$ no ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, i.e., tal que a condição inicial possua coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, \dot{\varphi}_0\right)$ em TS^2. Nesse caso a solução das equações acima com esta condição inicial é $(\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}_0 t\right)$, que é efectivamente um círculo máximo. Como ser um círculo máximo não depende da escolha de coordenadas, concluimos que qualquer geodésica é um círculo máximo.

As equações do transporte paralelo do vector V são

$$\dot{V}^\theta + \Gamma^{\theta}_{ij}\dot{x}^i V^j = 0 \Leftrightarrow \dot{V}^\theta + \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} V^\varphi = 0 \Leftrightarrow \dot{V}^\theta - \operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 V^\varphi = 0;$$
$$\dot{V}^\varphi + \Gamma^{\varphi}_{ij}\dot{x}^i V^j = 0 \Leftrightarrow \dot{V}^\varphi + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} V^\theta = 0 \Leftrightarrow \dot{V}^\varphi + \operatorname{cotg}\theta_0 V^\theta = 0.$$

Estas equações implicam por exemplo

$$\ddot{V}^\theta + \cos^2\theta_0 V^\theta = 0 \Leftrightarrow V^\theta = A\cos(\cos\theta_0 t + B)$$

onde $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes, e portanto

$$V^\varphi = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0}\dot{V}^\theta = -\frac{A}{\operatorname{sen}\theta_0}\operatorname{sen}(\cos\theta_0 t + B).$$

A condição inicial é $V^\theta(0) = 1, V^\varphi(0) = 0$, donde concluimos que $A = 1, B = 0$ e portanto

$$\begin{aligned} V^\theta &= \cos(\cos\theta_0 t); \\ V^\varphi &= -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta_0}\operatorname{sen}(\cos\theta_0 t). \end{aligned}$$

Note-se que em particular

$$\langle V(t), V(t)\rangle = (V^\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta_0 (V^\varphi)^2 = 1.$$

Portanto o ângulo α entre $V(0)$ e $V(2\pi)$ é dado por

$$\cos\alpha = \langle V(0), V(2\pi)\rangle = V^\theta(2\pi) = \cos(2\pi\cos\theta_0),$$

ou seja,

$$\alpha = \pm 2\pi\cos\theta_0.$$

2. Mostre que se $(q^1, \ldots, q^n)$ são coordenadas locais no espaço de configurações Q de um sistema mecânico então

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i.$$

onde $\mu : TQ \to T^*Q$ é o operador massa e $K : TQ \to \mathbb{R}$ é a energia cinética.

Resolução: Basta notar que

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) &= \mu\left[\left(\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right)\frac{\partial}{\partial q^i}\right] = g_{li}\left(\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right) dq^l \\ &= g_{li}\left[\ddot{q}^i + \frac{1}{2}g^{im}(\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk})\dot{q}^j\dot{q}^k\right] dq^l \\ &= \left[g_{li}\ddot{q}^i + \frac{1}{2}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})\dot{q}^j\dot{q}^k\right] dq^l \\ &= \left(g_{li}\ddot{q}^i + \partial_j g_{kl}\dot{q}^j\dot{q}^k - \frac{1}{2}\partial_l g_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right) dq^l \\ &= \left(g_{ij}\ddot{q}^j + \partial_j g_{ki}\dot{q}^j\dot{q}^k - \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right) dq^i \end{aligned}$$

e que uma vez que em coordenadas locais $K = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ se tem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} &= \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\dot{q}^j\right) - \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k = g_{ij}\ddot{q}^j + \partial_k g_{ij}\dot{q}^j\dot{q}^k - \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k \\ &= g_{ij}\ddot{q}^j + \partial_j g_{ki}\dot{q}^j\dot{q}^k - \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k. \end{aligned}$$