2^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

15 de Março de 2002

1. Considere as coordenada locais (θ, φ) usuais em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas pela parametrização $\mathbf{g} :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

   a) Determine a expressão nestas coordenadas da métrica Riemanniana induzida em S^2 pela métrica Euclidiana usual em $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcule os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita associados a estas coordenadas locais.

   c) Mostre que as geodésicas são círculos máximos (**Sugestão:** *note que pode sempre escolher as coordenadas por forma a que a condição inicial da geodésica satisfaça* $(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, \dot{\theta}, 0\right)$).

   d) Seja $c : [0, 2\pi] \to S^2$ dado por $(\theta, \varphi) = (\theta_0, t)$, onde $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (portanto c não é uma geodésica). Seja V um campo vectorial paralelo ao longo de c tal que $V(0) = \frac{\partial}{\partial\theta}$. Calcule o ângulo pelo qual V é rodado quando regressa ao ponto inicial. Será a conexão de Levi-Civita de S^2 com a métrica induzida uma conexão plana? (**Nota:** *O ângulo que calculou é exactamente o ângulo pelo qual o plano de oscilação do Pêndulo de Foulcaut - i.e., um pêndulo suficientemente comprido e pesado para oscilar durante dias - roda ao longo de um dia num local à latitude* $\frac{\pi}{2} - \theta_0$*; a razão para isto é que o plano de oscilação do pêndulo permanece fixo em relação às estrelas à medida que a Terra roda sobre o seu eixo*).

2. Mostre que se $(q^1, \ldots, q^n)$ são coordenadas locais no espaço de configurações Q de um sistema mecânico então

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i.$$

   onde $\mu : TQ \to T^*Q$ é o operador massa e $K : TQ \to \mathbb{R}$ é a energia cinética.