13^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

10 de Junho de 2002

1. Considere a sucessão formada pelo primeiro dígito na expansão decimal de cada um dos inteiros da forma 2^n para $n \in \mathbb{N}_0$:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \ldots$$

O objectivo deste exercício é responder à seguinte questão: existe algum 7 nesta sucessão? Em caso afirmativo, qual é o dígito que ocorre mais frequentemente, 7 ou 8?

a) Mostre que se $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ então

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e^{i\omega k} = 0.$$

b) Prove a seguinte versão do Teorema Ergódico: se $f : S^1 \to \mathbb{R}$ é contínua e $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então para qualquer $\varphi \in S^1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\varphi + \omega k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi.$$

c) Mostre que $\log 2$ é um múltiplo irracional de $\log 10$.

d) Responda à questão inicialmente colocada.

2. O objectivo deste exercício é determinar coordenadas acção para o problema de Kepler. Recorde que o Hamiltoniano $H : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbb{R}$ deste problema é dado em coordenadas polares por

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{M}{r}.$$

a) Mostre que $F_1 = H$ e $F_2 = p_\theta$ são primeiros integrais em involução, independentes em $T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \setminus C$, onde

$$C = \left\{ p_r dr + p_\theta d\theta \in T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) : p_r = 0 \text{ e } p_\theta^2 = Mr \right\}.$$

Explique porque é que C tem que ser um conjunto invariante para o fluxo hamiltoniano de H, e mostre que o fluxo neste conjunto consiste em órbitas circulares com velocidade angular constante.

b) Mostre que o conjunto de nível

$$M_{(E,l)} = \left\{ p_r dr + p_\theta d\theta \in T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) : \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{M}{r} = E \text{ e } p_\theta = l \right\}$$

é compacto *sse* $E < 0$. Mostre que $M_{(E,l)} \subset C$ *sse* $E = -\frac{M^2}{2l^2}$. (**Sugestão:** *Estude a variação de* p_r *ao longo de* $M_{(E,l)}$).

c) Supondo $-\frac{M^2}{2l^2} < E < 0$, sabemos que $M_{(E,l)}$ é um toro, cuja projecção em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ é uma coroa circular. Sendo γ_r e γ_θ geradores da homologia do toro que se projectam em curvas $\theta =$ constante e $r =$ constante, mostre que

$$\begin{aligned} &I_\theta = l; \\ &2\pi I_r = 2\int_{r_-}^{r_+} \sqrt{2Er^2 + 2Mr - l^2}\frac{dr}{r}, \end{aligned}$$

onde $r_\pm$ são as raizes do polinómio $2Er^2 + 2Mr - l^2$.

d) Escrevendo

$$\begin{aligned} &E = -\frac{M}{2a}; \\ &\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{Ma}}; \\ &r = a(1 + \varepsilon \operatorname{sen} \psi) \end{aligned}$$

(com $a > \frac{l^2}{M}$, donde $0 < \varepsilon < 1$), mostre que

$$2\pi I_r = \varepsilon^2 \sqrt{Ma} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \psi}{1 + \varepsilon \operatorname{sen} \psi} d\psi.$$

e) Use o Teorema dos Resíduos para mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \psi}{1 + \varepsilon \operatorname{sen} \psi} d\psi = 2\pi \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2}.$$

Conclua que se $l > 0$

$$I_r = \sqrt{Ma} - l.$$

f) Mostre que

$$H = -\frac{M^2}{2(I_r + I_\theta)^2}.$$

Conclua que H é um Hamiltoniano degenerado e que todas as órbitas contidas em toros invariantes são periódicas com período

$$T = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}.$$

g) Escreva as equações do movimento, e use-as para mostrar que

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{p_r}{l}$$

donde

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{M}{l^2}.$$

h) Mostre que a solução desta equação linear de coeficientes constantes é

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{l^2}(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)) = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)).$$

Esta é a equação em coordenadas polares de uma elipse de foco na origem, excentricidade ε e semieixo maior a formando um ângulo θ_0 com o eixo dos xx.