12^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

27 de Maio de 2002

1. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão 2 e $H \in C^\infty(M)$ o Hamiltoniano. Mostre que H é completamente integrável no complementar do conjunto dos seus pontos críticos. O que são os toros invariantes neste caso?

2. Considere o oscilador harmónico unidimensional, descrito pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas por
$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2.$$

   a) Escreva o correspondente Hamiltoniano $H : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e determine os seus pontos críticos.

   b) Determine os toros invariantes e a expressão do Hamiltoniano em termos das coordenadas acção-ângulo. (**Sugestão:** *Use o Teorema de Stokes*).

   c) Calcule a frequência do movimento em cada toro.

   d) Generalize os resultados acima para o oscilador harmónico bidimensional, descrito pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas por
$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$
   (**Sugestão:** *Procure primeiros integrais da forma* $F_1(x, p_x)$ e $F_2(y, p_y)$).