# Resolução Sumária da
# $10^{\text{a}}$ ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

27 de Maio de 2002

1. **(Problema de Dido)**: Seja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ uma função $C^\infty$ satisfazendo $f(0) = f(2\pi) = R$. O caminho dado em coordenadas polares $(r, \theta)$ por $r = f(\theta)$ descreve portanto uma curva fechada $\partial K$ que é fronteira de um conjunto compacto em estrela $K$.

   a) Mostre que o comprimento de $C$ de $\partial K$ e a área $A$ de $K$ são dados respectivamente por

   $$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta, \quad A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta.$$

   b) Mostre que $f(\theta) \equiv R$ é um ponto crítico de C restrito às funções $f$ que satisfazem $A = \pi R^2$. Que tipo de ponto crítico será?

   c) Mostre que $f(\theta) \equiv R$ é um ponto crítico de A restrito às funções $f$ que satisfazem $C = 2\pi R$. Que tipo de ponto crítico será?

   **Resolução:** Uma parametrização do caminho é $(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta)$, pelo que o seu comprimento será

   $$\begin{aligned} C &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'\cos\theta - f\operatorname{sen}\theta)^2 + (f'\operatorname{sen}\theta + f\cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{f'^2 + f^2} d\theta. \end{aligned}$$

   A área de $K$ é facilmente calculada em coordenadas polares:

   $$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\theta)} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^f d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f^2 d\theta.$$

   Para determinar os pontos críticos de C restrito às funções $f$ que satisfazem $A = \pi R^2$ devemos escrever a equação de Euler-Lagrange para o Lagrangeano

   $$L = \sqrt{f^2 + f'^2} + \frac{1}{2}\lambda f^2.$$

   Esta equação fica

   $$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}}\right) - \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}} - \lambda f = 0$$

e $f \equiv R$ é solução desde que $\lambda = -\frac{1}{R}$. Uma vez que $f \equiv R$ satisfaz também $f(0) = f(2\pi) = R$ e $A = \pi R^2$, concluimos que se trata de um ponto crítico de $C$ restrito a $A = \pi R^2$. É de esperar que este ponto crítico seja um mínimo absoluto, uma vez que de todas as curvas que limitam uma dada área a circunferência é aquela cujo comprimento é mínimo.

Para determinar os pontos críticos de A restrito às funções $f$ que satisfazem $C = 2\pi R$ devemos escrever a equação de Euler-Lagrange para o Lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}f^2 + \lambda\sqrt{f^2 + f'^2}.$$

Esta equação fica

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\lambda f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}}\right) - f - \frac{\lambda f}{\sqrt{f^2 + f'^2}} = 0$$

e $f \equiv R$ é solução desde que $\lambda = -R$. Uma vez que $f \equiv R$ satisfaz também $f(0) = f(2\pi) = R$ e $C = 2\pi R$, concluimos que se trata de um ponto crítico de $A$ restrito a $C = 2\pi R$. É de esperar que este ponto crítico seja um máximo absoluto, uma vez que de todas as curvas fechadas com um dado comprimento a circunferência é aquela que limita a área máxima.

O problema de encontrar a curva com um dado comprimento limitando a área máxima diz-se o *problema de Dido*. De acordo com a *Eneida*, a rainha Dido foi uma das primeiras pessoas a resolver (de forma intuitiva) este problema, por volta do ano 850 a.C.: ao ser-lhe concedida toda a terra que conseguisse envolver com uma pele de vaca, ela cortou a pele em tiras finas e delimitou um enorme círculo, onde fundou a cidade de Cartago.

2. Uma partícula de massa $m$ move-se sobre a circunferência dada em coordenadas esféricas $(r, \theta, \varphi)$ por $r = l, \varphi = \omega t$ (onde estamos a usar domínios das coordenadas angulares do tipo $\theta \in ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ e $\varphi \in ]\varphi_0, \varphi_0 + \pi[$; portanto a circunferência roda em torno do eixo dos $zz$ com velocidade angular constante $\omega$). A única força exterior é a correspondente ao campo gravitacional constante, $U = mgz$.

   a) Escreva o Lagrangeano do sistema correspondente a esta restrição holónoma dependente do tempo e mostre que se trata de um sistema mecânico conservativo.

   b) Escreva a equação do movimento e esboce o correspondente retrato de fase no cilindro $S^1 \times \mathbb{R} \ni (\theta, \dot{\theta})$. (**Sugestão:** *Considere separadamente os casos $\omega \leq \omega_c$ e $\omega > \omega_c$, onde $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$*).

   **Resolução:** O Lagrangeano para uma partícula de massa $m$ no campo gravitacional constante é dada em coordenadas esféricas por

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2) - mgr\cos\theta.$$

Um caminho compatível com a restrição é descrito nestas coordenadas por $(r, \theta, \varphi) = (l, \theta, \omega t) \Rightarrow (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = (0, \dot{\theta}, \omega)$, e portanto o Lagrangeano restrito a uma destas curvas fica

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 l^2 \operatorname{sen}^2\theta) - mgl\cos\theta.$$

Este é o Lagrangeano correspondente a um sistema conservativo unidimensional com energia cinética efectiva

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

e energia potencial efectiva

$$\tilde{U} = -\frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \operatorname{sen}^2 \theta + m g l \cos \theta.$$

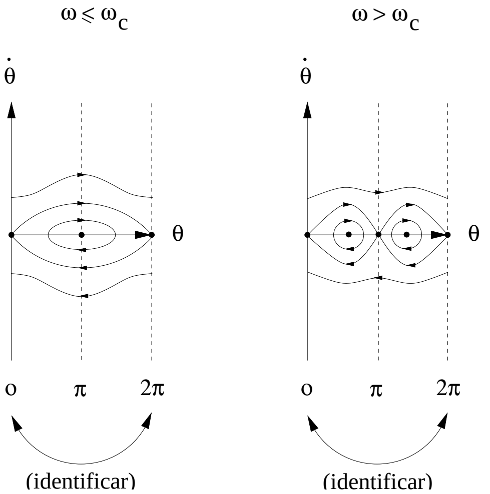
A equação do movimento é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} - \omega^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0,$$

e consequentemente os pontos críticos da energia são dados por

$$\cos\theta \operatorname{sen}\theta = -\frac{g}{\omega^2 l}\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \text{ ou } \cos\theta = -\frac{g}{\omega^2 l}.$$

Vemos portanto que se $\omega \leq \omega_c$ existem apenas dois pontos críticos, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, que são necessariamente o máximo e o mínimo de $U$; se $\omega > \omega_c$, surgem os dois pontos críticos adicionais $\theta = \operatorname{arcos}\left(-\frac{g}{\omega^2 l}\right)$ e $\theta = 2\pi - \operatorname{arcos}\left(-\frac{g}{\omega^2 l}\right)$. Como $\theta = 0$ tem que continuar a ser um máximo local, estes dois pontos deverão ser mínimos locais e portanto $\theta = 0$ passa a ser um máximo local (diz-se que para $\omega = \omega_c$ ocorre uma *bifurcação*). O retrato de fase do sistema é então como a seguir se esboça.




Fisicamente, quando a velocidade de rotação é baixa ($\omega \leq \omega_c$) o sistema comporta-se como um pêndulo; quando a velocidade de rotação é suficientemente elevada ($\omega \leq \omega_c$) a força centrífuga torna a posição de equilíbrio $\theta = 0$ instável e faz surgir duas novas posições de equilíbrio estáveis.