10^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

20 de Maio de 2002

1. **(Problema de Dido)**: Seja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ satisfazendo $f(0) = f(2\pi) = R$. O caminho dado em coordenadas polares (r, θ) por $r = f(\theta)$ descreve portanto uma curva fechada ∂K que é fronteira de um conjunto compacto em estrela K.

   a) Mostre que o comprimento de C de ∂K e a área A de K são dados respectivamente por

   $$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta, \quad A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta.$$

   b) Mostre que $f(\theta) \equiv R$ é um ponto crítico de C restrito às funções f que satisfazem $A = \pi R^2$. Que tipo de ponto crítico será?

   c) Mostre que $f(\theta) \equiv R$ é um ponto crítico de A restrito às funções f que satisfazem $C = 2\pi R$. Que tipo de ponto crítico será?

2. Uma partícula de massa m move-se sobre a circunferência dada em coordenadas esféricas (r, θ, φ) por $r = l, \varphi = \omega t$ (onde estamos a usar domínios das coordenadas angulares do tipo $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ e $\varphi \in]\varphi_0, \varphi_0 + \pi[$; portanto a circunferência roda em torno do eixo dos zz com velocidade angular constante ω). A única força exterior é a correspondente ao campo gravitacional constante, $U = mgz$.

   a) Escreva o Lagrangeano do sistema correspondente a esta restrição holónoma dependente do tempo e mostre que se trata de um sistema mecânico conservativo.

   b) Escreva a equação do movimento e esboce o correspondente retrato de fase no cilindro $S^1 \times \mathbb{R} \ni (\theta, \dot{\theta})$. (**Sugestão:** *Considere separadamente os casos* $\omega \leq \omega_c$ *e* $\omega > \omega_c$*, onde* $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$).