1^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

11 de Março de 2002

1. Mostre que se $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \in T_p^*Q \otimes T_p^*Q$ então

   (i) g é simétrico *sse* $g_{ij} = g_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$;

   (ii) g é não degenerado *sse* $\det(g_{ij}) \neq 0$;

   (iii) g é definido positivo *sse* (g_{ij}) é uma matriz definida positiva.

2. Dê um exemplo de uma subvariedade N de uma variedade pseudo-Riemanniana (Q, g) tal que a restrição de g a N não seja uma métrica pseudo-Riemanniana em N.

3. Seja G o grupo das tranformações afins próprias de $\mathbb{R}$, i.e., das funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por
$$g(t) = yt + x$$
com $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Tomando $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ como coordenadas globais induzimos uma estrutura diferenciável em G.

   a) Mostre que G com esta estrutura diferenciável é um grupo de Lie.

   b) Determine a métrica invariante à esquerda induzida pelo produto interno Euclidiano
   $$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$
   em $\mathfrak{g} = T_{(0,1)}G$.