3º Exame de Mecânica Geométrica

15 de Julho de 2002 – 9 horas
Duração: 3h

1. O *problema restrito dos três corpos com parâmetro* $\mu \in [0,1]$ é dado pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \setminus \{r_1 r_2 = 0\} \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por

$$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

onde (r,θ) são as habituais coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$ e $r_1, r_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ são as funções distância Euclidiana entre o ponto de coordenadas (r,θ) e os pontos de coordenadas (μ, t) e $(1-\mu, t+\pi)$, respectivamente. Este Lagrangeano descreve o movimento de uma partícula de massa desprezável no campo gravitacional de duas outras partículas de massas $1-\mu$ e μ (ditas os *primários*), que descrevem órbitas circulares em torno do seu centro de massa $r = 0$. Pretendemos analisar este movimento num sistema de coordenadas em rotação (r,φ), onde $\theta = t + \varphi$.

(2 val.) a) Mostre que a expressão do Lagrangeano no sistema de coordenadas em rotação é

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + r^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

onde r_1, r_2 só dependem de (r,φ). Descreva o sistema mecânico conservativo com termo magnético $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU - \cdot\rfloor d\omega)$ definido por este Lagrangeano.

(2 val.) b) Mostre que (r_1, r_2) formam um sistema de coordenadas locais em cada um dos semiplanos $\{0 < \varphi < \pi\}$, $\{\pi < \varphi < 2\pi\}$, e que

$$(1-\mu){r_1}^2 + \mu {r_2}^2 = r^2 + \mu(1-\mu).$$

Aproveite este resultado para indicar os pontos de equilíbrio do sistema nestes semiplanos.

(2 val.) c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{r_1 r_2 = 0\}\right) \to \mathbb{R}$.

(2 val.) d) Suponha daqui em diante que $\mu = 0$. Prove que H é completamente integrável num conjunto aberto denso $U \subset T^*\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{r = 0\}\right)$. Mostre que a projecção do toro/cilindro invariante

$$M_{(E,l)} = \{p_r dr + p_\varphi d\varphi \in U : H = E, p_\varphi = l\}$$

em $\mathbb{R}^2$ é dada em coordenadas locais por

$$E + l - \frac{l^2}{2r^2} + \frac{1}{r} \geq 0.$$

Conclua que se $E + l < 0$ e $M_{(E,l)} \neq \varnothing$ então $M_{(E,l)}$ é um toro.

(2 val.) e) Escolhendo para geradores da homologia do toro as curvas

$$\gamma_r = \left\{p_r dr + p_\varphi d\varphi \in M_{(E,l)} : \varphi = 0\right\};$$
$$\gamma_\varphi = \left\{p_r dr + p_\varphi d\varphi \in M_{(E,l)} : r = \text{constante}\right\}$$

mostre que as correspondentes coordenadas acção são

$$I_r = \frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+}\sqrt{2(E+l) - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2}{r}}dr;$$
$$I_\varphi = l,$$

onde r_-, r_+ são os zeros da integranda.

(2 val.) f) Mostre que

$$H = -\frac{1}{2(I_r + I_\varphi)^2} - I_\varphi.$$

Será este sistema não-degenerado?

2. Uma função $y : [-1,1] \to]-\infty, 0]$ com $y(-1) = y(1) = 0$ descreve a configuração de um fio de extremidades fixas nos pontos $(\pm 1, 0)$. Suponha que o fio é homogéneo, possui massa unitária, comprimento $2\,\mathrm{senh}(1)$ e se encontra sujeito a um campo gravitacional constante de aceleração $-g\mathbf{e}_y$.

(2 val.) a) Mostre que o comprimento C e a energia potencial gravitacional U do fio são dados por

$$C = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}dx;$$
$$U = \frac{g}{2\,\mathrm{senh}(1)}\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+y'^2}dx.$$

(2 val.) b) Sabendo que a configuração de equilíbrio do fio é a que conduz ao valor mínimo de U para todas as configurações com o mesmo comprimento e extremidades, escreva as condições que esta configuração deve satisfazer. Verifique que $y(x) = \cosh(x) - \cosh(1)$ é uma solução.

(2 val.) 3. a) Prove o *Teorema da Recorrência de Poincaré:* Se (M,ω) é uma variedade simpléctica, $H \in C^\infty(M)$, $U \subset M$ é um aberto com volume finito invariante para o fluxo de X^H e $p \in M$ então em qualquer vizinhança $V \ni p$ existem pontos cujas órbitas pelo fluxo de X^H regressam a V.

(2 val.) b) Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana compacta e $p \in Q$. Mostre que existe uma vizinhança $V \ni p$ e uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to Q$ tal que $\gamma^{-1}(V)$ é desconexo.