1º Exame de Mecânica Geométrica

22 de Junho de 2002 – 9 horas
Duração: 3h

1. Considere uma partícula livre que se move ao longo de uma superfície esférica, descrita pelo Lagrangeano $L : TS^2 \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por

$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2\right),$$

onde $(\theta, \varphi) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ são as habituais coordenadas esféricas em S^2. Pretendemos analisar o movimento da partícula num sistema de coordenadas em rotação (θ, ψ), onde $\varphi = \Omega t + \psi$ com $\Omega \in \mathbb{R}^+$ (isto é interessante para, por exemplo, analisar o movimento de um satélite em órbita circular em relação à superfície da Terra).

(2 val.) a) Mostre que a expressão do Lagrangeano no sistema de coordenadas em rotação é

$$L(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\dot{\psi}^2\right) + \Omega\operatorname{sen}^2\theta\dot{\psi} + \frac{1}{2}\Omega^2\operatorname{sen}^2\theta.$$

Descreva o sistema mecânico conservativo com termo magnético $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU - \cdot\rfloor d\omega)$ definido por este Lagrangeano.

(2 val.) b) Mostre que se $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU - \cdot\rfloor d\omega)$ é um sistema mecânico conservativo com termo magnético então os pontos de equilíbrio formam o conjunto

$$\{v_p \in TQ : dU(p) = 0 \text{ e } v_p = 0\}.$$

Aproveite este resultado para indicar os pontos de equilíbrio do sistema acima. Como interpreta o resultado que obteve?

(2 val.) c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*S^2 \to \mathbb{R}$.

(2 val.) d) Escreva as equações de Hamilton e indique uma órbita periódica do correspondente sistema dinâmico em T^*S^2.

(2 val.) e) Prove que H é completamente integrável num conjunto aberto denso $U \subset T^*S^2$. Mostre que a projecção do toro/cilindro invariante

$$M_{(E,l)} = \{p_\theta d\theta + p_\psi d\psi \in U : H = E, p_\psi = l\}$$

em S^2 é dada em coordenadas locais por

$$\frac{l^2}{2\operatorname{sen}^2\theta} \leq E + \Omega l.$$

Conclua que $M_{(E,l)}$ é compacta (e portanto é um toro).

(2 val.) f) Use a alínea anterior para concluir que se a partícula é lançada a partir de qualquer ponto que não seja um pólo ao longo de um meridiano (i.e., se $0 < \theta_0 < \pi$ e $\dot{\psi}_0 = 0$), então *não* atinge nenhum dos pólos. Qual deve ser a velocidade inicial da partícula de modo a atingir os pólos?

(2 val.) g) Escolhendo para geradores da homologia do toro as curvas

$$\gamma_\theta = \left\{ p_\theta d\theta + p_\psi d\psi \in M_{(E,l)} : \psi = 0 \right\};$$
$$\gamma_\psi = \left\{ p_\theta d\theta + p_\psi d\psi \in M_{(E,l)} : \theta = \frac{\pi}{2} \right\}$$

mostre que as correspondentes coordenadas acção são

$$I_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \sqrt{2(E + \Omega l) - \frac{l^2}{\operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta;$$
$$I_\psi = l,$$

onde θ_-, θ_+ são os zeros da integranda em $]0, \pi[$.

(2 val.) h) Mostre que

$$\omega^\theta = \sqrt{2E + 2\Omega l};$$
$$\omega^\psi = \omega^\theta - \Omega,$$

e que portanto

$$H = \frac{1}{2}(I_\theta + I_\psi)^2 - \Omega I_\psi.$$

Será este sistema não-degenerado?

(2 val.) 2. Em virtude do seu movimento de rotação, a Terra não é uma esfera perfeita, mas sim um elipsóide oblato; consequentemente, os seus momentos de inércia não são rigorosamente iguais, satisfazendo a relação

$$I_1 = I_2 \neq I_3;$$
$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq \frac{1}{306}.$$

Pretendemos analisar a variação do eixo de rotação da Terra no referencial ligado a esta. Sabemos que o eixo de rotação está muito próximo de $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$ (i.e., $|\Omega_1|, |\Omega_2| << |\Omega_3|$). Mostre que o eixo precessa em torno de $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$ e calcule o valor aproximado do período desta precessão (dita a *precessão de Chandler*).

(2 val.) 3. Dada uma variedade Riemanniana $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ compacta, sabe-se que existe sempre uma geodésica fechada, i.e., uma geodésica $q : \mathbb{R} \to Q$ com $\dot{q}(t) \neq 0$ tal que $q(0) = q(L)$ e $\dot{q}(0) = \dot{q}(L)$ para algum $L > 0$. Use este facto para mostrar que um corpo rígido com um ponto fixo movendo-se sob a acção de uma força conservativa determinada por uma dada função energia potencial $U \in C^\infty(SO(3))$ admite uma infinidade de movimentos periódicos. Dê um exemplo de um sistema mecânico conservativo que não possua qualquer movimento periódico.