4^{a} Série de problemas de Mecânica Geométrica

José Natário

26 de Junho de 2001

1. Seja $(Q, <, >)$ uma variedade Riemanniana e $(N, \ll, \gg)$ uma subvariedade mergulhada com a métrica induzida. Se $p \in N$ e $v_p \in T_pQ$, existe uma decomposição única $v_p = v_p^\top + v_p^\perp$, onde $v_p^\top \in T_pN$ e $v_p^\perp \in T_pN^\perp$. Dados $X, Y \in \chi(N)$, define-se

$$D_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^\top,$$

onde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões de X, Y a Q e ∇ é a conexão de Levi-Civita em $(Q, <, >)$.

a) Mostre que D está bem definido (i.e., não depende da escolha das extensões $\tilde{X}, \tilde{Y}$).

b) Mostre que D é a conexão de Levi-Civita de $(N, \ll, \gg)$.

c) Mostre que a aplicação

$$B(X, Y) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - D_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^\perp$$

está bem definida.

d) Mostre que B é bilinear e simétrica (B diz-se a *segunda forma fundamental* do mergulho de N em Q).

2. Considere um pêndulo duplo com comprimentos l e massas m idênticos.

(a) Escreva o Lagrangeano do sistema e as equações do movimento.

(b) Linearize as equações em torno de $\theta = \varphi = 0$ (onde θ, φ são os ângulos que cada pêndulo faz com a vertical). Procure soluções das equações linearizadas satisfazendo $\theta = k\varphi$, com $k \in \mathbb{R}$ constante (*modos normais*). Quais os períodos das oscilações resultantes?

3. Mostre que existe um isomorfismo $\Omega : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$A\xi = \Omega(A) \times \xi$$

para todo o $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$.

4. Seja C um corpo rígido com um ponto fixo $0 \in C$ e densidade $\rho : \overline{C} \to \mathbb{R}^+$. Suponha que o eixo dos zz é um *eixo de simetria* de C, i.e., suponha que em coordenadas cilíndricas (r, φ, z) para $\mathbb{R}^3$ se tem $(r, \varphi, z) \in C$ *sse* $(r, \varphi + \pi, z) \in C$ e $\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, \varphi + \pi, z)$. Mostre que $\mathbb{R}\mathbf{e}_z$ é um eixo principal de inércia de C e que o correspondente momento principal de inércia é

$$I_z = \int_C [r(\xi)]^2 \rho(\xi) d\xi.$$

5. Determine os eixos principais de inércia e os correspondentes momentos principais de inércia de

   a) Um paralelepípedo homogéneo de massa M, lados $2a, 2b, 2c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem;
   b) Um elipsóide homogéneo de massa M, semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem. (**Sugestão:** *comece por fazer a mudança de coordenadas* $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ *nos integrais a calcular*).

6. Suponha que $I_1 = I_2 = I_3$. Mostre que o corpo rígido roda em torno de um eixo fixo no espaço com velocidade angular constante (i.e., mostre que $\boldsymbol{\omega}$ é constante).

7. Suponha que $I_1 = I_2 \neq I_3$.

   a) Mostre que $\|\boldsymbol{\omega}\| = \|\boldsymbol{\Omega}\|$ é constante.
   b) Mostre que $\boldsymbol{\omega}$ *precessa* (i.e., roda) em torno de $\mathbf{p}$ com velocidade angular

$$\boldsymbol{\omega}_{pr} = \frac{\mathbf{p}}{I_1}.$$

8. Mostre que se a distribuição Σ é dada localmente pelos núcleos das formas $\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}$,

$$\Sigma = \ker(\omega^1) \cap \ldots \cap \ker(\omega^{n-m}),$$

   então Σ é integrável *sse*

$$d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-m} = 0$$

   para $i = 1, \ldots, n - m$.

9. Recorde que uma roda de raio R rolando no plano xOy sem escorregar define no espaço de configurações $Q = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \ni (\varphi, \psi, x, y)$ o vínculo não holónomo

$$W = \ker(dx - R\cos\varphi d\psi) \cap \ker(dy - R\,\mathrm{sen}\,\varphi d\psi).$$

   Mostre que existe uma curva compatível com este vínculo unindo dois quaisquer pontos do espaço de configurações.

10. (**Paradoxo dos Gémeos**): Dois gémeos, Alice e Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto Alice fica na Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção de um planeta situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança portanto 10 anos mais tarde (medidos no refrencial da Terra). Após uma curta estadia, Bernardo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, Alice tem 40 anos quando revê o seu irmão.

    a) Que idade tem Bernardo nesse reencontro?
    b) Como explica a assimetria nas idades dos gémeos? Afinal de contas, do ponto de vista do Bernardo, é ele quem está imóvel e é a Terra quem se afasta ou aproxima...
    c) Imagine que cada um dos gémeos possui um telescópio ultrapotente. O que é que cada um deles *vê*? Em particular, quanto tempo passa para cada um deles quando vêem passar um ano para o seu gémeo?

11. (**Paradoxo do Carro na Garagem**): Um carro com 5 metros de comprimento move-se a 80% da velocidade da luz na direcção de uma garagem de 4 metros de comprimento e duas portas opostas.

    a) Calcule o comprimento do carro medido por um observador na garagem. Mostre que se este observador fechar as portas no instante certo, o carro estará dentro da garagem por alguns momentos.

    b) Calcule o comprimento da garagem para um observador no carro. De acordo com este observador, será possível que o carro esteja alguma vez dentro da garagem? Como explica esta aparente contradição?

12. Suponha que uma partícula se move com velocidade w no referencial $t'Ox'$. Mostre que no referencial tOx a velocidade medida para a partícula é
$$\frac{w+v}{1+wv}.$$
O que sucede quando $w = \pm 1$?

13. (**Paradoxo dos Gémeos Generalizado**): Sejam $p, q \in \mathbb{R}^4$ dois acontecimentos unidos por uma linha recta do tipo tempo l. Mostre que o tempo próprio entre p e q medido ao longo de l é maior que o tempo próprio entre p e q medido ao longo de qualquer outra curva do tipo tempo unindo os dois acontecimentos. Por outras palavras, se um observador inercial e um observador (necessariamente) acelelerado se separam num dado acontecimento e se reencontram posteriormente, então o observador inercial mede sempre um intervalo de tempo superior entre o dois acontecimentos.

14. A geometria de Lorentz pode ser usada noutros contextos. Por exemplo, seja $\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial t}$ a trajectória de um observador imóvel na atmosfera, e seja a velocidade do som na atmosfera igual a 1.

    a) Seja $\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ a função tal que $\tau(p)$ é a coordenada t do acontecimento em que o observador ouve o som produzido em p. Mostre que
$$\tau(p) = t\left(\partial J^+(p) \cap \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$
e que as curvas de nível de τ são as superfícies cónicas
$$\tau^{-1}(t) = \partial J^-\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

    b) Mostre que $c : I \to \mathbb{R}^4$ representa a trajectória de uma partícula supersónica *sse*
$$\left\langle \dot{c}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle < 0 \quad \text{e} \quad \langle \dot{c}, \dot{c}\rangle > 0.$$

    c) Se o parâmetro da curva c é a coordenada t, tem-se
$$\frac{d\tau}{dt} = \dot{c} \cdot \tau.$$
Use este facto para argumentar que o observador ouve um estrondo sónico sempre que c é tangente a uma superfície $\tau =$ constante. Supondo que c é uma recta, o que é que o observador ouve antes e depois do estrondo?

d) Quando um avião ultrapassa a velocidade do som na vizinhança de um observador é vulgar este ouvir *dois* estrondos sónicos. Tente explicar este fenómeno.

15. Mostre que
$$SO(3) \simeq \left\{ L \in O_+^\uparrow(3,1) : L\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \right\}.$$
Conclua que existe um homomorfismo
$$h : SU(2) \to SO(3)$$
com núcleo $\{\pm I\}$. Mostre que $SU(2)$ é difeomorfo a S^3, e que portanto $SO(3)$ é difeomorfo a $\mathbb{R}P^3$. Determine $\pi_1(SO(3))$.

16. Visto da Terra, o Sol possui um diâmetro angular de cerca de meio grau. Que diâmetro angular mediria um observador que se estivesse a afastar do Sol a 96% da velocidade da luz numa vizinhança da Terra?

17. Considere uma partícula de massa m e carga e que se move ao longo do eixo dos xx de um referencial inercial sob a acção de um campo eléctrico $\mathbf{E} = E\frac{\partial}{\partial x}$. Assuma que $x = \frac{dx}{dt} = 0$ no instante $t = 0$, e que $eE > 0$.

    a) Calcule a trajectória da partícula no espaçotempo de Minkowski. (**Sugestão:** faça a mudança de variável $\frac{dx}{d\tau} \equiv u = \operatorname{senh} w$).

    b) Mostre que
    $$< \dot{c}, \ddot{c} >= 0$$
    e que
    $$|\ddot{c}| =< \ddot{c}, \ddot{c} >^{\frac{1}{2}} = \frac{eE}{m},$$
    onde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ é a trajectória da partícula. Conclua que esta é a aceleração medida para a partícula no referencial inercial onde a partícula se encontra instantâneamente em repouso (*aceleração própria*).

    c) Considere uma nave espacial que acelera com aceleração própria igual à aceleração g da gravidade terrestre, mantendo assim um ambiente confortável a bordo. Sabendo que $g \simeq 1$ ano^{-1} em unidades nas quais $c = 1$, calcule o tempo próprio que a nave demoraria a alcançar o centro da galáxia, a cerca de 30 000 anos-luz da Terra. Quanto tempo se passaria na Terra entretanto?

18. (**Paradoxo dos Gémeos num Cilindro)**: Considere a solução da equação de Einstein no vácuo dada pela variedade pseudo-Riemanniana $(\mathcal{C}, <,>)$, onde
$$\mathcal{C} = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x \leq 1\}/ \sim$$
com
$$(t, 0, y, z) \sim (t, 1, y, z)$$
e a métrica $<,>$ é dada por
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Suponha que a Terra corresponde à trajectória $x = y = z = 0$, e que mais uma vez ao completar 20 anos Bernardo deixa a sua irmã gémea Alice na Terra, partindo a 80% da velocidade da luz na direcção $\frac{\partial}{\partial x}$. Devido à topologia do espaço, os dois gémeos reencontrar-se-ão ao fim de 1,25 anos, *sem que Bernardo tenha alguma vez acelerado*.

a) Calcule a idade de cada gémeo no reencontro.

b) Explique a assimetria nessas idades. Afinal de contas, do ponto de vista do Bernardo é a Terra quem se afasta na direcção $-\frac{\partial}{\partial x}$ a 80% da velocidade da luz...

19. Considere o elemento de limha do espaço de Minkowski em coordenadas cilíndricas,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

e faça a mudança de coordenadas $\theta = \varphi - \omega t$. Verifique que $\frac{\partial}{\partial t}$ é ainda um campo de Killing, e que a região $r < \frac{1}{\omega}$ é estacionária. Mostre que a métrica da variedade espacial é

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2} d\theta^2 + dz^2$$

e que

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{\omega^2 r}{1 - \omega^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r}; \\ \mathbf{H} &= \frac{2\omega}{1 - \omega^2 r^2} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Verifique que $\hat{\nabla} \times \mathbf{H} = 2\mathbf{G} \times \mathbf{H}$.

20. Recorde que para uma variedade 3-dimensional esfericamente simétrica com elemento de linha

$$dl^2 = A^2(r) dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 \right)$$

se tem

$$\begin{aligned} \hat{R}_{rr} &= \frac{2A'}{rA^3}; \\ \hat{R}_{\theta\theta} = \hat{R}_{\varphi\varphi} &= \frac{A'}{rA^3} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A^2} \right) \end{aligned}$$

no co-referencial ortonormado $\{A dr, r d\theta, r \operatorname{sen} \theta d\varphi\}$. Procure soluções *estáticas* (i.e., soluções estacinárias satisfazendo $\mathbf{H} = \mathbf{0}$) das equações de Einstein com variedades espaciais deste tipo. (**Sugestão:** *Note que neste caso se tem necessariamente* $\hat{R} = 0$).