2^{a} Série de problemas de Mecânica Geométrica

José Natário

10 de Abril de 2001

1. Se (U, φ) é uma carta local para uma variedade diferenciável M de dimensão n e $\varphi^{-1} = (x^1, \ldots, x^n)$ são coordenadas locais, é sempre possível escrever um tensor de tipo $\binom{0}{2}$ na forma
$$g = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j$$
onde (g_{ij}) é uma matriz $n \times n$. Mostre que g é uma métrica pseudo-Riemanniana *sse* (g_{ij}) é uma matriz simétrica e $\det(g_{ij}) \neq 0$ em U para qualquer carta local (U, φ). Mostre ainda que g é uma métrica Riemanniana *sse* adicionalmente (g_{ij}) é definida positiva.

2. Seja G o grupo das transformações afins *próprias* de $\mathbb{R}$, i.e., das funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por
$$g(t) = yt + x \qquad (y > 0, x \in \mathbb{R})$$
com o produto de composição usual. G pode ser identificado com o conjunto
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$
e possui por isso uma estrutura diferenciável natural.
   a) Mostre que G é um grupo de Lie.
   b) Construa a métrica invariante à esquerda que no ponto $e = (0, 1)$ é dada por $dx \otimes dx + dy \otimes dy$.

3. Seja $(Q, <,>)$ uma variedade pseudo-Riemanniana, $f : N \to Q$ uma imersão e $\ll, \gg$ a forma bilinear induzida em N.
   a) Mostre que se $<,>$ é Riemanniana então $\ll, \gg$ é definida positiva, e portanto não-degenerada. Conclua que $(N, \ll, \gg)$ é uma variedade Riemanniana.
   b) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ com a métrica de Minkowski
   $$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$
   existem subvariedades mergulhadas para as quais $\ll, \gg$ é degenerada.

4. Nas coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z), o movimento de uma partícula em queda livre num potencial gravitacional $\phi(t, x, y, z)$ é uma solução das equações
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$
Em $\mathbb{R}^4$ com coordenadas (t, x, y, z) defina uma conexão afim cujas geodésicas sejam exactamente as soluções das equações acima.

5. Seja V um espaço vectorial real de dimensão n e $<,>$ uma forma bilinear simétrica não-degenerada em V.

   a) Prove que V possui sempre uma base $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ortonormal relativamente a $<,>$.

   b) Mostre que se $<,>$ não é definida positiva o método de ortogonalização de Gram-Schmidt em geral não funciona.

6. Seja Q uma variedade diferenciável de dimensão n e ∇ uma conexão afim em Q. Mostre que ∇ é simétrica *sse* em qualquer sistema de coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$ se tem

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \quad (i, j, k = 1, \ldots, n).$$

7. Se $(Q, <,>)$ é uma variedade pseudo-Riemanniana e $c : I \to Q$ é uma curva C^∞ define-se a *energia* de c em $[a, b] \subset I$ através de

$$E = \int_a^b \frac{1}{2} < \dot{c}(t), \dot{c}(t) > dt$$

   Mostre que c é uma geodésica da conexão de Levi-Civita *sse* c é um ponto crítico da energia.

8. Caracterize todas as geodésicas da métrica de Poincaré

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

   no semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Mostre que dados dois quaisquer pontos distintos do semiplano existe uma única geodésica que passa por esses dois pontos. Dê um exemplos de variedades Riemannianas contendo dois pontos pelos quais passam (i) infinitas geodésicas; (ii) nenhuma geodésica.

9. Seja $(Q, <,>)$ uma variedade pseudo-Riemanniana. A função $L : TQ \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(v_p) = |< v_p, v_p >|^{1/2}$$

   não é diferenciável no *fibrado dos vectores nulos*

$$NQ = \{v_p \in TQ : < v_p, v_p >= 0\},$$

   mas a sua restrição a $TQ \setminus NQ$ é C^∞. Seja $c : I \to \mathbb{R}$ uma curva C^∞; o seu *levantamento* para TQ é a curva C^∞ $\dot{c} : I \to TQ$.

   a) Mostre que se c é uma geodésica então $L(\dot{c}(t))$ é constante. Portanto o levantamento de qualquer geodésica ou não intersecta NQ ou está contido em NQ (caso em que a geodésica se diz uma *geodésica nula*).

   b) Mostre que se c é uma geodésica não nula então c satisfaz as equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano L. Conclua que c é um ponto crítico da correspondente acção (comprimento de arco).

   c) Mostre que o parâmetro t de uma geodésica não nula é uma função afim do comprimento de arco (por isso se diz um *parâmetro afim*).

   d) Prove que o comprimento de arco é invariante por mudança de parâmetro.

e) Mostre que se o levantamento de c está contido em $TQ \setminus NQ$ e c é um ponto crítico do comprimento de arco então existe uma reparametrização de c que é uma geodésica não nula.

f) Conclua que se c é tal que o seu levantamento está contido em $TQ \setminus NQ$ e o seu comprimento é $\leq$ (ou $\geq$) que o de qualquer outra curva nas mesma condições unindo $c(a)$ a $c(b)$ $(a, b \in I)$ então c é necessariamente uma geodésica reparametrizada.

g) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana $ds^2 = dx^2 + dy^2$ não existem curvas de comprimento máximo unindo $(0,0)$ a $(0,1)$.

h) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ com a métrica de Minkowski $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ não existem curvas de comprimento mínimo unindo $(0,0)$ a $(0,1)$.

10. Mostre que as intersecções de

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

com os planos da forma

$$\begin{aligned} \pi_\alpha &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = \alpha z\} \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \\ \pi_\infty &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = 0\} \end{aligned}$$

são geodésicas de S^3 (com a métrica usual) que não se intersectam entre si. (Estas geodésicas são os chamados *paralelos de Clifford*, e são as fibras da fibração de Hopf).