2º Exame de Mecânica Geométrica

José Natário

20 de Julho de 2001

1. O *problema restrito dos três corpos* com primários de massas iguais é dado (em unidades apropriadas) pelo Lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + x\dot{y} - y\dot{x} + U(x,y)$$

onde

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1/2}{\sqrt{(x-1/2)^2 + y^2}} + \frac{1/2}{\sqrt{(x+1/2)^2 + y^2}}$$

a) Descreva o sistema mecânico $(Q, <,>, \mathcal{F})$ correspondente.

b) Mostre que os pontos de equilíbrio do sistema são os pontos de críticos da função U.

c) Mostre que existem exactamente 3 pontos de equilíbrio no eixo dos xx (os chamados *pontos Eulerianos*). **Sugestão:** *Comece por mostrar que*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,0) > 0.$$

d) Considere as funções

$$r_1(x,y) = \sqrt{(x-1/2)^2 + y^2};$$
$$r_2(x,y) = \sqrt{(x+1/2)^2 + y^2}.$$

Justifique que (r_1, r_2) são coordenadas locais em cada um dos abertos

$$H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\};$$
$$H^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

Escreva a função U em função destas coordenadas nesses abertos e aproveite para mostrar que existem apenas mais dois pontos de equilíbrio (os chamados *pontos Lagrangeanos*).

e) Mostre que

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U(x,y)$$

é um primeiro integral do sistema. O que pode dizer acerca do valor de E para uma trajectória que passe por um dos pontos Lagrangeanos?

2. *Acidente!* Ao passar pela Terra a 80% da velocidade da luz, a *Enterprise* faz disparar os motores altamente experimentais da sonda *Einstein*, que imediatamente começa a acelerar com aceleração 1g na mesma direcção do movimento da *Enterprise*. Recorde que se medirmos intervalos de tempo e distâncias em anos e anos-luz, respectivamente, as equações do movimento da *Einstein* serão

$$t = \sinh \tau;$$
$$x = \cosh \tau - 1,$$

(onde τ é o tempo próprio).

   a) Quanto tempo demorará a *Einstein* a alcançar a *Enterprise*
      (i) de acordo com um observador no referencial (inercial) da Terra?
      (ii) de acordo com os tripulantes da *Enterprise*?
      (iii) de acordo com o cronómetro da *Einstein*?
   b) Qual a velocidade da *Einstein* em relação à *Enterprise* quando a alcança?
   c) Sabendo que teoricamente os motores da *Einstein* continuarão a funcionar eternamente, o capitão Kirk pondera a hipótese de destruir a sonda. Quanto tempo tem o capitão para tomar a sua decisão?

3. Prove que existe um movimento do corpo rígido com um ponto fixo que o leva para qualquer posição suficientemente próxima da sua posição inicial. **Sugestão:** *Recorde que qualquer movimento do corpo rígido é uma geodésica de uma métrica invariante à esquerda em* $SO(3)$.