Exame de Mecânica Geométrica (para praticar)

José Natário

15 de Abril de 2002

1. Considere uma partícula de massa m movendo-se sem atrito sobre a superfície do parabolóide $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$. Sabendo que o potencial gravitacional é $U = mgz$,

   a) Descreva o sistema mecânico $(Q, <, >, \mathcal{F})$ correspondente.

   b) Prove que não existem movimentos ilimitados.

   c) Mostre que os círculos
   $$\left\{z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \text{constante}\right\}$$
   são trajectórias possíveis para a partícula. Calcule a velocidade com que a partícula tem que percorrer cada círculo. (**Sugestão:** *escreva o Lagrangeano do sistema em coordenadas polares* (r, θ)).

   d) Escreva uma métrica Riemanniana para um aberto U do parabolóide tal que o círculo
   $$\left\{z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = 1\right\}$$
   é uma geodésica dessa métrica.

2. Um sistema de coordenadas locais em $SO(3)$ é dado pelos chamados *ângulos de Euler*, definidos da seguinte forma: um elemento $S \in SO(3)$ é completamente determinado pela imagem $\{\mathbf{e}_1 = S\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_2 = S\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3 = S\mathbf{e}_z\}$ da base canónica $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ de $\mathbb{R}^3$. Define-se então o ângulo de Euler θ como sendo o ângulo entre $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_z$. A intersecção entre os planos $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ e $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ diz-se a *linha nodal*; o ângulo de Euler φ é simplesmente o ângulo entre a linha nodal e $\mathbb{R}\mathbf{e}_x$, e o ângulo de Euler ψ é o ângulo entre a linha nodal e $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$. Considere um corpo rígido com momentos de inércia I_1, I_2, I_3 e eixos principais de inércia $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ na posição de referência.

   a) Justifique que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo é uma função linear de $(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$.

   b) Justifique que na decomposição
   $$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\psi$$
   da velocidade angular nas componentes proporcionais a $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ se tem
   $$\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z;$$
   $$\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{e}_3.$$

c) Justifique que se $\psi = 0$ então $\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta}\mathbf{e}_1$

d) Mostre que se $\varphi = \psi = 0$ então

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_1 + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_3.$$

e) Argumente que se $I_1 = I_2$ a energia cinética

$$K = \frac{1}{2}\left(I_1\left(\omega_1\right)^2 + I_2\left(\omega_2\right)^2 + I_3\left(\omega_3\right)^2\right)$$

não depende dos valores de φ, ψ. Escreva uma expressão geral para a energia cinética do corpo rígido.

f) Se o centro de massa se encontra no ponto $(0, 0, l)$ para $\theta = 0$, a energia potencial do corpo no campo gravitacional constante será $mg\cos\theta$, onde m é a massa total do corpo e g é a aceleração gravitacional. Escreva três primeiros integrais para o movimento do corpo rígido no campo gravitacional constante.

3. Durante uma missão de vigilância no planeta dos pérfidos Klingons, a *Enterprise* descobre que estes se preparam para construir um míssil mais rápido que a luz para com ele atacarem o planeta dos benévolos Lmaquianos, situado a 12 anos-luz. Alarmado, o capitão Kirk ordena que a *Enterprise* parta à velocidade máxima ($\frac{12}{13}$ da velocidade da luz) para o planeta ameaçado, ao mesmo tempo que um sinal de rádio é enviado a prevenir os Lmaquianos do ataque iminente. Infelizmente, estas medidas revelam-se infrutíferas: onze anos depois (no referencial de ambos os planetas) os Klingons completam a construção do míssil, que lançam de imediato a uma velocidade de 12 vezes a velocidade da luz. Portanto o aviso, deslocando-se à velocidade da luz, chega em simultâneo com o míssil, doze anos depois do seu envio, e a Enterprise alcança as ruínas do planeta um ano mais tarde.

   a) Quanto tempo demora a viagem da *Enterprise* do ponto de vista dos seus tripulantes?

   b) No referencial dos planetas, usando anos e anos-luz como unidades de tempo e espaço, sejam $(0, 0)$ as coordenadas (t, x) do acontecimento em que a *Enterprise* descobre a trama, $(11, 0)$ as coordenadas do lançamento do míssil, $(12, 12)$ as coordenadas da destruição do planeta dos Lmaquianos e $(13, 12)$ as coordenadas da chegada da *Enterprise* às ruínas do planeta. Calcule as coordenadas (t', x') dos mesmos acontecimentos no referencial da Enterprise.

   c) Desenhe um diagrama com as trajectórias da Enterprise, dos planetas, do aviso e do míssil no referencial $t'Ox'$ da Enterprise. Descreva o desenrolar dos acontecimentos do ponto de vista dos observadores deste referencial.

4. Considere uma solução estacionária da equação de Einstein no vácuo com variedade espacial euclidiana,

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

   a) Mostre que tal solução é necessariamente estática, i.e., mostre que $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

   b) Mostre que a equação de Einstein se reduz a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

   Justifique que se ϕ é analítica então ϕ é completamente determinada pelos valores de ϕ e $d\phi$ num ponto.

c) Mudando de coordenadas podemos assumir que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

num ponto, e portanto em toda a variedade espacial. Resolva a equação de Einstein sob esta hipótese.

d) Mostre que a solução obtida é na verdade uma região aberta do espaçotempo de Minkowski.