Mecânica Geométrica

4^a Série

Jorge Rocha, n^{o}45344

5 de Julho de 2001

1)

Seja $(Q, <,>)$ uma variedade Riemanniana e $(N, <<,>>)$ uma subvariedade mergulhada com a métrica induzida. Seja $f : N \longrightarrow Q$ o mergulho.

(a)

O operador D está definido através de

$$D_X Y = \left(\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right)^{\top} \tag{1}$$

onde $X, Y \in \chi(N)$, $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ são extensões de X e Y a Q e ∇ é a conexão de Levi-Civita em $(Q, <,>)$. Sabemos que $\left(\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right)(p)$ depende apenas do campo vectorial $\widetilde{X}$ no ponto p e do campo $\widetilde{Y}$ ao longo de uma curva tangente a $\widetilde{X}(p)$. Uma vez que $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ são extensões de X e Y, temos que, se $p \in N$, então $\widetilde{X}(p) = X(p)$ e o campo $\widetilde{Y}$ ao longo de uma curva tangente a $\widetilde{X}(p)$ tem o mesmo comportamento (numa vizinhança de p) que o campo Y ao longo de uma curva tangente a $X(p)$. Portanto, $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ não depende das extensões e $D_X Y$ está bem definido.

(b)

Através da definição de $D_X Y$ as quatro propriedades das conexões afins são imediatamente satisfeitas. Portanto, D é uma conexão afim em N. Para ser a conexão de Levi-Civita falta mostrar que é simétrica e compatível com a métrica $<<,>>$. Não esquecendo que $[X, Y] \in TN$ e que ∇ é simétrica temos

$$[X, Y] = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^{\top} = \left(\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}\right)^{\top} = \left(\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right)^{\top} - \left(\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}\right)^{\top} = D_X Y - D_Y X \tag{2}$$

Portanto D é simétrica. Para mostrar a compatibilidade temos que ter em conta o mergulho f e a métrica induzida através de

$$<< X, Y >>_p = \langle f_* X, f_* Y \rangle_{f(p)} \tag{3}$$

Se ∇ é a conexão de Levi-Civita em $(Q, \langle , \rangle)$ então satisfaz

$$\widetilde{Z} \cdot \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\widetilde{Z}} \widetilde{X}, \widetilde{Y} \right\rangle + \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{Z}} \widetilde{Y} \right\rangle \tag{4}$$

onde $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ são extensões de $X, Y, Z \in \chi(N)$. Tendo em mente que estes campos são tangentes à variedade N podemos escrever

$$\begin{aligned} Z \cdot \langle\langle X, Y \rangle\rangle &= \widetilde{Z} \cdot \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\widetilde{Z}} \widetilde{X}, \widetilde{Y} \right\rangle + \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{Z}} \widetilde{Y} \right\rangle = \left\langle \left(\nabla_{\widetilde{Z}} \widetilde{X}\right)^{\top}, \widetilde{Y} \right\rangle + \left\langle \widetilde{X}, \left(\nabla_{\widetilde{Z}} \widetilde{Y}\right)^{\top} \right\rangle = \\ &= \left\langle D_Z X, \widetilde{Y} \right\rangle + \left\langle \widetilde{X}, D_Z Y \right\rangle = \langle\langle D_Z X, Y \rangle\rangle + \langle\langle X, D_Z Y \rangle\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Logo, a conexão D é também compatível com a métrica induzida em $(N, <<,>>)$.

(c)

Sabemos da alínea (a) que $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ não depende da escolha das extensões e portanto

$$B(X,Y) = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_X Y \tag{6}$$

também não depende das extensões. Podemos também verificar que $B(X,Y) \in TN^{\perp}$:

$$B(X,Y) = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_X Y = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^{\top} = \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^{\top} + \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^{\perp} - \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^{\top} = \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^{\perp} \tag{7}$$

(d)

Comecemos por verificar que B é bilinear. Fazendo uso das propriedades das conexões afins temos

$$\begin{aligned}
B(fX+gY,Z) &= \nabla_{f\widetilde{X}+g\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - D_{fX+gY}Z = \nabla_{f\widetilde{X}}\widetilde{Z} + \nabla_{g\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - D_{fX}Z - D_{gY}Z = \\
&= f\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} + g\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - fD_X Z - gD_Y Z = f\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - D_X Z\right) + g\left(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - D_Y Z\right) = \\
&= fB(X,Z) + g(Y,Z) \qquad\qquad f,g \in C^{\infty}(N,\mathbb{R}) \qquad (8) \\
B(X,fY+gZ) &= \nabla_{\widetilde{X}}\left(f\widetilde{Y} + g\widetilde{Z}\right) - D_X\left(fY+gZ\right) = \nabla_{\widetilde{X}}\left(f\widetilde{Y}\right) + \nabla_{\widetilde{X}}\left(g\widetilde{Z}\right) - D_X\left(fY\right) - D_X\left(gZ\right) = \\
&= \left(\widetilde{X}\cdot f\right)\widetilde{Y} + f\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \left(\widetilde{X}\cdot g\right)\widetilde{Z} + g\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \left(X\cdot f\right)Y - fD_X Y - \left(X\cdot g\right)Z - gD_X Z = \\
&= f\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_X Y\right) + g\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - D_X Z\right) = \\
&= fB(X,Y) + gB(X,Z) \qquad\qquad f,g \in C^{\infty}(N,\mathbb{R}) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Utilizou-se acima o facto de que, sobre a variedade N, se tem $\left(\widetilde{X}\cdot f\right)\widetilde{Y} = \left(X\cdot f\right)Y$.

A propriedade de simetria de B segue imediatamente da simetria das conexões ∇ e D:

$$\begin{aligned}
B(Y,X) &= \nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - D_Y X = \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - [\widetilde{X},\widetilde{Y}]\right) - \left(D_X Y - [X,Y]\right) = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_X Y + [X,Y] - [\widetilde{X},\widetilde{Y}] = \\
&= \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_X Y = B(X,Y) \qquad (10)
\end{aligned}$$

uma vez que, sobre a variedade N, se tem $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] = [X,Y]$.

2)

(a) Considere-se um pêndulo duplo com comprimento das hastes l idênticos e massas $m_1 = m_2 = m$.

Consideremos também o sistema mecânico conservativo $(Q, \langle,\rangle, -dU_1 - dU_2)$, onde o espaço de configurações é $Q = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$, a métrica é dada por

$$\begin{aligned}
< \dot{x}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{y}_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \dot{z}_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \dot{x}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{y}_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \dot{z}_2\frac{\partial}{\partial z_2}, & \\
\dot{x}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{y}_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \dot{z}_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \dot{x}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{y}_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \dot{z}_2\frac{\partial}{\partial z_2} > = & \\
= m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) & \qquad (11)
\end{aligned}$$

e, assumindo que o campo gravitacional é $-g\frac{\partial}{\partial z}$ em que g é a constante gravitacional, a força conservativa que actua sobre cada uma das massas é

$$\mathcal{F}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) = -mgdz = -d\left(mgz\right) = -dU(x,y,z) \tag{12}$$

O pêndulo duplo corresponde ao vínculo holónomo $\mathcal{N} = T^2$, onde o mergulho $i : T^2 \longrightarrow Q = \mathbb{R}^6$ é dado por

$$i(\theta, \varphi) = (l\sin\theta, 0, -l\cos\theta, l\sin\theta + l\sin\varphi, 0, -l\cos\theta - l\cos\varphi) \tag{13}$$

Portanto a métrica induzida em $\mathcal{N}$ é

$$\begin{aligned}
<< \dot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \dot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \dot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \dot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} >>= \\
=< l\cos\theta\dot\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + l\sin\theta\dot\theta\frac{\partial}{\partial z_1} + l(\cos\theta\dot\theta + \cos\varphi\dot\varphi)\frac{\partial}{\partial x_2} + l(\sin\theta\dot\theta + \sin\varphi\dot\varphi)\frac{\partial}{\partial z_2}, \\
l\cos\theta\dot\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + l\sin\theta\dot\theta\frac{\partial}{\partial z_1} + l(\cos\theta\dot\theta + \cos\varphi\dot\varphi)\frac{\partial}{\partial x_2} + l(\sin\theta\dot\theta + \sin\varphi\dot\varphi)\frac{\partial}{\partial z_2} >= \\
= m\left(l^2\dot\theta^2 + l^2(\cos\theta\dot\theta + \cos\varphi\dot\varphi)^2 + l^2(\sin\theta\dot\theta + \sin\varphi\dot\varphi)^2\right) = \\
= ml^2\left(2\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

Como se trata de um sistema mecânico conservativo, o Lagrangeano é igual a

$$\begin{aligned}
L &= K - U = \\
&= \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)\right) + mgl(\cos\theta + \cos\theta + \cos\varphi) = \\
&= ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + ml^2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta - \varphi) + mgl(2\cos\theta + \cos\varphi)
\end{aligned} \tag{15}$$

As equações do movimento obtêm-se agora aplicando a as equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 &\iff \frac{d}{dt}\left(2ml^2\dot\theta + ml^2\dot\varphi\cos(\theta - \varphi)\right) + ml^2\dot\theta\dot\varphi\sin(\theta - \varphi) + 2mgl\sin\theta = 0 \\
&\iff \frac{d}{dt}\left(2\dot\theta + \dot\varphi\cos(\theta - \varphi)\right) + \dot\theta\dot\varphi\sin(\theta - \varphi) + 2\frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\
&\iff 2\ddot\theta + \ddot\varphi\cos(\theta - \varphi) - \dot\varphi(\dot\theta - \dot\varphi)\sin(\theta - \varphi) + \dot\theta\dot\varphi\sin(\theta - \varphi) + 2\frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\
&\iff 2\ddot\theta + \ddot\varphi\cos(\theta - \varphi) + \dot\varphi^2\sin(\theta - \varphi) + 2\frac{g}{l}\sin\theta = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 &\iff \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot\varphi + ml^2\dot\theta\cos(\theta - \varphi)\right) - ml^2\dot\theta\dot\varphi\sin(\theta - \varphi) + mgl\sin\varphi = 0 \\
&\iff \frac{d}{dt}\left(\dot\varphi + \dot\theta\cos(\theta - \varphi)\right) - \dot\theta\dot\varphi\sin(\theta - \varphi) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \\
&\iff \ddot\varphi + \ddot\theta\cos(\theta - \varphi) - \dot\theta(\dot\theta - \dot\varphi)\sin(\theta - \varphi) - \dot\theta\dot\varphi\sin(\theta - \varphi) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \\
&\iff \ddot\varphi + \ddot\theta\cos(\theta - \varphi) - \dot\theta^2\sin(\theta - \varphi) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

(b) Linearizando as equações (16) e (17) em torno de $\theta = \varphi = 0$ ficamos com

$$2\ddot\theta + \ddot\varphi + 2\frac{g}{l}\theta = 0 \tag{18}$$

$$\ddot\varphi + \ddot\theta + \frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{19}$$

Procuramos agora soluções da equações (18) e (19) que satisfaçam $\theta = k\varphi$, com $k \in \mathbb{R}$ constante. Substituíndo

$$\dot\theta = k\dot\varphi \qquad\qquad \ddot\theta = k\ddot\varphi \tag{20}$$

obtemos

$$(2k + 1)\ddot\varphi + 2k\frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{21}$$

$$(k + 1)\ddot\varphi + \frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{22}$$

Dividindo (21) por $2k+1$ e dividindo (22) por $k+1$ resulta

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2k}{2k+1}\frac{g}{l}\varphi = -\frac{1}{k+1}\frac{g}{l}\varphi \iff \frac{2k}{2k+1} = \frac{1}{k+1} \iff 2k^2 = 1$$
$$\iff k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{23}$$

Assim as equações diferenciais (21) e (22) reduzem-se a

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \tag{24}$$

onde $\omega^2 = \frac{g}{l\left(1\pm\sqrt{2}/2\right)} > 0$. Portanto, os modos normais são soluções da forma

$$\begin{cases} \varphi(t) = A\cos(\omega^+ t) + B\sin(\omega^+ t) \\ \theta(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}A\cos(\omega^+ t) + \frac{\sqrt{2}}{2}B\sin(\omega^+ t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \varphi(t) = A\cos(\omega^- t) + B\sin(\omega^- t) \\ \theta(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A\cos(\omega^- t) - \frac{\sqrt{2}}{2}B\sin(\omega^- t) \end{cases} \tag{25}$$

onde

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{g}{l\left(1+\sqrt{2}/2\right)}} \qquad \omega^- = \sqrt{\frac{g}{l\left(1-\sqrt{2}/2\right)}} \tag{26}$$

O período das oscilações é

$$T = \frac{2\pi}{\omega^\pm} = 2\pi\sqrt{\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{l}{g}} \tag{27}$$

Vemos que o período das oscilações dos modos normais depende da constante de proporcionalidade k e que é menor que o período das oscilações de um pêndulo simples com um comprimento de haste igual a $2l$ quando $k = -\sqrt{2}/2$ (corresponde à situação das duas hastes pendularem em sentidos contrários) e que é maior que o período das oscilações de um pêndulo simples com um comprimento de haste igual a $2l$ quando $k = +\sqrt{2}/2$ (corresponde à situação das duas hastes pendularem em sincronia).

3)

Sejam $A \in \mathfrak{so}(3) = \{B \in M_{3\times 3} : B^T = -B\}$ e $\xi \in \mathbb{R}^3$. Então

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad A\xi = \begin{pmatrix} a_1\xi_2 + a_2\xi_3 \\ -a_1\xi_1 + a_3\xi_3 \\ -a_2\xi_1 - a_3\xi_2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Seja $\Omega(A) \in \mathbb{R}^3$ dado por

$$\Omega(A) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Pretendemos que seja verificada a relação $A\xi = \Omega(A) \times \xi$, ou seja,

$$\Omega(A)\times\xi = \begin{pmatrix} \omega_2\xi_3 - \omega_3\xi_2 \\ \omega_3\xi_1 - \omega_1\xi_3 \\ \omega_1\xi_2 - \omega_2\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\xi_2 + a_2\xi_3 \\ -a_1\xi_1 + a_3\xi_3 \\ -a_2\xi_1 - a_3\xi_2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad \Omega(A) = \begin{pmatrix} -a_3 \\ a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

A expressão (30) define assim uma aplicação $\Omega : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é trivialmente bijectiva. Verifiquemos que Ω é homomorfismo:

$$\Omega(\alpha A + \beta B) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 + \beta b_2 \\ -\alpha a_1 - \beta b_1 & 0 & \alpha a_3 + \beta b_3 \\ -\alpha a_2 - \beta b_2 & -\alpha a_3 - \beta b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha a_3 - \beta b_3 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ -\alpha a_1 - \beta b_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \alpha\begin{pmatrix} -a_3 \\ a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -b_3 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} = \alpha\Omega(A) + \beta\Omega(B) \tag{31}$$

Concluímos assim que a aplicação Ω é um isomorfismo.

4)

Seja C um corpo rígido em $\mathbb{R}^3$ com um ponto fixo $0 \in C$ e uma densidade $\rho : \overline{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Suponha-se que, em coordenadas cilíndricas, se tem

$$\begin{cases} (r,\varphi,z) \in C \iff (r,\varphi+\pi,z) \in C \\ \rho(r,\varphi,z) = \rho(r,\varphi+\pi,z) \end{cases} \tag{32}$$

O tensor de inércia $I : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é definido através do seguinte operador linear

$$I(\mathbf{\Omega}) = \int_C \left[\xi \times (\mathbf{\Omega} \times \xi)\right] \rho(\xi) d\xi \tag{33}$$

Calculemos $I(\mathbf{e}_z)$. Comecemos por calcular o termo $\xi \times (\mathbf{\Omega} \times \xi)$. Se $\xi = (x,y,z)$, temos

$$\mathbf{e}_z \times \xi = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y \tag{34}$$

$$\xi \times (\mathbf{e}_z \times \xi) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = -xz\mathbf{e}_x - yz\mathbf{e}_y + \left(x^2+y^2\right)\mathbf{e}_z \tag{35}$$

Então, mudando para coordenadas cilíndricas, resulta

$$\begin{aligned} I(\mathbf{e}_z) &= \int_C \left(-xz, -yz, x^2+y^2\right) \rho(x,y,z) dxdydz = \\ &= \int_z \int_\varphi \int_r \left(-rz\cos\varphi, -rz\sin\varphi, r^2\right) \rho(r,\varphi,z)\, r\, drd\varphi dz \end{aligned} \tag{36}$$

Podemos já concluir que as duas primeiras entradas de $I(\mathbf{e}_z)$ se anulam. Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} -r^2 z\cos\varphi.\rho(r,\varphi,z)d\varphi &= \int_0^{\pi} -r^2 z\cos\varphi.\rho(r,\varphi,z)d\varphi + \int_\pi^{2\pi} -r^2 z\cos\varphi.\rho(r,\varphi,z)d\varphi = \\ &= -\int_0^{\pi} r^2 z\cos\varphi.\rho(r,\varphi,z)d\varphi - \int_0^{\pi} r^2 z\cos(\varphi'+\pi).\rho(r,\varphi'+\pi,z)d\varphi' = \\ &= -\int_0^{\pi} r^2 z\cos\varphi.\rho(r,\varphi,z)d\varphi + \int_0^{\pi} r^2 z\cos\varphi'.\rho(r,\varphi',z)d\varphi' = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

O mesmo procedimento permite concluir que a segunda entrada também se anula. A expressão (36) reduz-se então a

$$I(\mathbf{e}_z) = \left(0, 0, \int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho(r,\varphi,z)\, r\, drd\varphi dz\right) = I_z \mathbf{e}_z \tag{38}$$

Portanto, $\mathbb{R}\mathbf{e}_z$ é um espaço próprio do operador linear I, ou seja, é um eixo principal de inércia de C, por definição. O momento principal de inércia associado a esse eixo é (mudando novamente para coordenadas cartesianas)

$$I_z = \int_C \left[r(\xi)\right]^2 \rho(\xi) d\xi \tag{39}$$

5)

(a) Pretendemos determinar os eixos de inércia e os correspondentes momentos principais de inércia de um paralelepípedo homogéneo de massa M, lados $2a, 2b, 2c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem.

Comecemos por orientar o paralelepípedo de modo a que as arestas sejam paralelas aos eixos xx, yy e zz. Determinmos agora a densidade do paralelepípedo. Porque este é homogéneo, sabemos que a densidade é constante, $\rho(\xi) = k$. Tendo em conta esta identidade podemos calcular a massa do objecto:

$$M = \int_C k d\xi = k \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} dxdydz = 8kabc$$
$$\implies \quad k = \frac{M}{8abc} \tag{40}$$

Considerando a fórmula (33), o operador de inércia pode escrever-se

$$I(\mathbf{\Omega}) = \frac{M}{8abc} \int_C \left[\xi \times (\mathbf{\Omega} \times \xi)\right] d\xi \tag{41}$$

Procedendo de modo semelhante ao que foi feito no problema 4), calculamos $I(\mathbf{e}_x)$.

$$\xi \times (\mathbf{e}_x \times \xi) = \left(y^2 + z^2\right) \mathbf{e}_x - xy\mathbf{e}_y - xz\mathbf{e}_z \tag{42}$$

$$\implies \quad I(\mathbf{e}_x) = \frac{M}{8abc} \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} \left(y^2 + z^2, -xy, -xz\right) dxdydz = \left[I(\mathbf{e}_x)\right]_x + \left[I(\mathbf{e}_x)\right]_y + \left[I(\mathbf{e}_x)\right]_z \tag{43}$$

Podemos concluir imediatamente que $\left[I(\mathbf{e}_x)\right]_y$ e $\left[I(\mathbf{e}_x)\right]_z$ se anulam pois envolvem integrais de funções ímpares em intervalos simétricos. Falta então apenas calcular $\left[I(\mathbf{e}_x)\right]_x$:

$$\begin{aligned}
\left[I(\mathbf{e}_x)\right]_x &= \frac{M}{8abc} \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} y^2 + z^2 dxdydz = \frac{M}{4bc} \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} y^2 + z^2 dydz = \\
&= \frac{M}{4bc} \int_{-b}^{b} \int_{-c}^{c} y^2 dzdy + \frac{M}{4bc} \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} z^2 dydz = \frac{M}{2b} \int_{-b}^{b} y^2 dy + \frac{M}{2c} \int_{-c}^{c} z^2 dz = \\
&= \frac{M}{2b} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b}^{b} + \frac{M}{2c} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-c}^{c} = \frac{Mb^2}{3} + \frac{Mc^2}{3} = \frac{M}{3}\left(b^2 + c^2\right)
\end{aligned} \tag{44}$$

Portanto,

$$I(\mathbf{e}_x) = \frac{M}{3}\left(b^2 + c^2\right) \mathbf{e}_x \tag{45}$$

Devido à geometria do problema, podemos garantir que

$$I(\mathbf{e}_y) = \frac{M}{3}\left(a^2 + c^2\right) \mathbf{e}_y \tag{46}$$

$$I(\mathbf{e}_z) = \frac{M}{3}\left(a^2 + b^2\right) \mathbf{e}_z \tag{47}$$

pelo que a matriz que representa o tensor de inércia na base escolhida é

$$I = \frac{M}{3} \begin{bmatrix} \left(b^2 + c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(a^2 + c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(a^2 + b^2\right) \end{bmatrix} \tag{48}$$

A matriz I já se encontra na forma diagonal, logo os eixos principais de inércia são $\mathbb{R}\mathbf{e}_x$, $\mathbb{R}\mathbf{e}_y$ e $\mathbb{R}\mathbf{e}_z$ (são os eixos do paralelepípedo) e os momentos de inércia associados são respectivamente $\frac{M}{3}\left(b^2 + c^2\right)$, $\frac{M}{3}\left(a^2 + c^2\right)$ e $\frac{M}{3}\left(a^2 + b^2\right)$.

(b) Pretendemos determinar os eixos de inércia e os correspondentes momentos principais de inércia de um elipsóide homogéneo de massa M, semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e centro na origem.

Novamente, começamos por escolher um referencial ortogonal cujos eixos coincidem com os eixos do elipsóide. Em seguida, determinamos a densidade do elipsóide:

$$\rho(\xi) = k \quad \Longrightarrow \quad M = \int_C k \, d\xi = k \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dzdydx \tag{49}$$

Fazendo a mudança de variáveis $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ a expressão (49) escreve-se

$$M = k \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \int_{-\sqrt{1-u^2-v^2}}^{\sqrt{1-u^2-v^2}} abc.dwdvdu = k.abc \times (\text{Volume da esfera de raio 1}) = k.abc.\frac{4}{3}\pi$$

$$\Longrightarrow \quad k = \frac{3M}{4\pi abc} \tag{50}$$

Procedendo como na alínea anterior obtemos

$$I(\mathbf{e}_x) = \frac{3M}{4\pi abc} \int_C \left[\xi \times (\mathbf{e}_x \times \xi)\right] d\xi = \frac{3M}{4\pi abc} \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} \left(y^2+z^2, -xy, -xz\right) dzdydx \tag{51}$$

Novamente, podemos concluir que os integrais da segunda e terceira entradas se anulam porque envolvem integrais de funções ímpares em intervalos simétricos. Aplicando a mesma mudança de variáveis que acima ficamos com

$$\left[I(\mathbf{e}_x)\right]_x = \frac{3M}{4\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \int_{-\sqrt{1-u^2-v^2}}^{\sqrt{1-u^2-v^2}} \left(b^2v^2 + c^2w^2\right) dwdvdu =$$

$$= \frac{3M}{4\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \int_{-\sqrt{1-u^2-v^2}}^{\sqrt{1-u^2-v^2}} b^2v^2 dwdv + \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \int_{-\sqrt{1-u^2-w^2}}^{\sqrt{1-u^2-w^2}} c^2w^2 dvdw \right\} du =$$

$$= \frac{3M}{4\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} b^2v^2 2\sqrt{1-u^2-v^2} dv + \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} c^2w^2 2\sqrt{1-u^2-w^2} dw \right\} du =$$

$$= \frac{3M}{4\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ 2(b^2+c^2) \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} v^2\sqrt{1-u^2-v^2} dv \right\} du =$$

$$= \frac{3M(b^2+c^2)}{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} v^2\sqrt{1-u^2-v^2} dvdu =$$

$$= \frac{3M(b^2+c^2)}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}\pi \left(u^2-1\right)^2 du = \frac{3M(b^2+c^2)}{2\pi} \frac{2\pi}{15} = \frac{M}{5}\left(b^2+c^2\right) \tag{52}$$

ou seja,

$$I(\mathbf{e}_x) = \frac{M}{5}\left(b^2+c^2\right)\mathbf{e}_x \tag{53}$$

Por razões de simetria do problema, podemos garantir que

$$I(\mathbf{e}_y) = \frac{M}{5}\left(a^2+c^2\right)\mathbf{e}_y \tag{54}$$

$$I(\mathbf{e}_z) = \frac{M}{5}\left(a^2+b^2\right)\mathbf{e}_z \tag{55}$$

e portanto a matriz que representa o operador de inércia na base escolhida é dada por

$$I = \frac{M}{5} \begin{bmatrix} \left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix} \tag{56}$$

A matriz I já se encontra na forma diagonal, logo os eixos principais de inércia são $\mathbb{R}\mathbf{e}_x$, $\mathbb{R}\mathbf{e}_y$ e $\mathbb{R}\mathbf{e}_z$ (são os eixos do elipsóide) e os momentos de inércia associados são respectivamente $\frac{M}{5}\left(b^2+c^2\right)$, $\frac{M}{5}\left(a^2+c^2\right)$ e $\frac{M}{5}\left(a^2+b^2\right)$.

6)

Suponha-se que um corpo rígido tem momentos principais de inércia iguais: $I_1 = I_2 = I_3 =: \lambda$. Então podemos escolher uma base para $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz que representa o tensor de inércia se escreva $I = \lambda\, id$. Substituíndo esta relação na equação de Euler obtemos então

$$I\,\dot{\mathbf{\Omega}} = (I\,\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{\Omega} \iff \lambda\,\dot{\mathbf{\Omega}} = \lambda\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \iff \dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} = 0 \tag{57}$$

Por definição de velocidade angular temos

$$\omega = S\,\mathbf{\Omega} \tag{58}$$

onde $S(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, SO(3))$ e $S(0) = id$. Derivando a expressão (58) resulta

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(S\,\mathbf{\Omega}) = \dot{S}\,\mathbf{\Omega} + S\,\dot{\mathbf{\Omega}} \tag{59}$$

Como vimos nas aulas, $\dot{S} = SA$ para alguma matriz antissimétrica $A \in \mathfrak{so}(3)$. Usando este resultado e a igualdade (57) na equação (59) obtemos

$$\dot{\omega} = \dot{S}\,\mathbf{\Omega} + S\,\dot{\mathbf{\Omega}} = SA\,\mathbf{\Omega} \tag{60}$$

Finalmente utilizando o resultado do problema 3) concluímos que

$$\dot{\omega} = SA\,\mathbf{\Omega} = S\,\Omega(A) \times \mathbf{\Omega} = S\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} = 0 \tag{61}$$

ou seja, a velocidade angular é constante.

7)

Suponha-se que um corpo rígido tem dois momentos principais de inércia iguais $I_1 = I_2 \neq I_3$. Então podemos escolher uma base para $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz que representa o tensor de inércia se escreva

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{62}$$

(a) Comecemos por mostrar que $||\omega|| = ||\mathbf{\Omega}||$. Não esquecendo que $S \in SO(3)$ e portanto satisfaz $S^T S = id$ temos

$$||\omega||^2 = \omega^T\omega = (S\,\mathbf{\Omega})^T (S\,\mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega}^T S^T S\,\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}^T\mathbf{\Omega} = ||\mathbf{\Omega}||^2 \tag{63}$$

Fazendo a raíz quadrada aos dois membros obtemos o resultado pretendido.

Mostremos agora que $||\mathbf{\Omega}||$ é constante.

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{\Omega}||^2 = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{\Omega}^T\mathbf{\Omega}\right) = \dot{\mathbf{\Omega}}^T\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^T\dot{\mathbf{\Omega}} = \left(\mathbf{\Omega}^T\dot{\mathbf{\Omega}}\right)^T + \mathbf{\Omega}^T\dot{\mathbf{\Omega}} = 2\,\mathbf{\Omega}^T\dot{\mathbf{\Omega}} \tag{64}$$

Escrevendo $\mathbf{\Omega} = (x, y, z)^T$ a equação anterior reduz-se a

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{\Omega}||^2 = 2\,\mathbf{\Omega}^T\dot{\mathbf{\Omega}} = 2\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 2\,(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \tag{65}$$

Podemos calcular $\dot{\mathbf{\Omega}}$ através da equação de Euler:

$$\begin{aligned} I\,\dot{\mathbf{\Omega}} \;=\; (I\,\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{\Omega} \iff & \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} I_1\dot{x} \\ I_1\dot{y} \\ I_3\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 x \\ I_1 y \\ I_3 z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz\,(I_1 - I_3) \\ xz\,(I_3 - I_1) \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{x} = yz\frac{I_1 - I_3}{I_1} \\ \dot{y} = xz\frac{I_3 - I_1}{I_1} \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{66}$$

Substituíndo (66) em (65) obtemos

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{\Omega}||^2 = 2\,(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 2\left(xyz\frac{I_1 - I_3}{I_1} - xyz\frac{I_1 - I_3}{I_1}\right) = 0 \tag{67}$$

donde concluímos que $||\omega|| = ||\mathbf{\Omega}||$ é constante.

(b) Já sabemos que a velocidade angular ω tem norma constante. O momento linear $\mathbf{p}$ também tem norma constante, uma vez que $\dot{\mathbf{p}} = 0$. Para provar que ω precessa em torno de $\mathbf{p}$ falta mostrar que o ângulo θ entre os dois vectores é constante. Nas aulas provou-se que

$$K = \frac{1}{2}\langle I\,\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle I\,\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}\rangle = 2K \tag{68}$$

Se rodarmos os eixos do referencial, o produto interno não se altera pelo que

$$\langle I\,\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}\rangle = \langle SI\,\mathbf{\Omega}, S\,\mathbf{\Omega}\rangle = \langle \mathbf{p}, \omega\rangle = 2K = c^{te} \tag{69}$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{p}, \omega\rangle}{||\mathbf{p}||\,||\omega||} = c^{te} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = c^{te} \tag{70}$$

Determinemos agora a velocidade angular de precessão ω_{pr}. O vector $\omega(t)$ descreve uma curva com velocidade

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left(S\,\mathbf{\Omega}\right) = \dot{S}\,\mathbf{\Omega} + S\,\dot{\mathbf{\Omega}} = SA\,\mathbf{\Omega} + S\,\dot{\mathbf{\Omega}} = S\left(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}\right) + S\,\dot{\mathbf{\Omega}} = S\,\dot{\mathbf{\Omega}} \tag{71}$$

Utilizando mais uma vez a equação de Euler escrevemos

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= S\,\dot{\mathbf{\Omega}} = S\,I^{-1}\left(I\,\mathbf{\Omega}\right)\times\mathbf{\Omega} = \\
&= S\begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} yz\,(I_1 - I_3) \\ xz\,(I_3 - I_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{I_1}S\begin{pmatrix} yz\,(I_1 - I_3) \\ xz\,(I_3 - I_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{I_1}S\left(I\,\mathbf{\Omega}\right)\times\mathbf{\Omega} = \frac{1}{I_1}\left(SI\,\mathbf{\Omega}\right)\times\left(S\,\mathbf{\Omega}\right) = \left(\frac{\mathbf{p}}{I_1}\right)\times\omega
\end{aligned} \tag{72}$$

Portanto, a velocidade angular de precessão é

$$\omega_{pr} = \frac{\mathbf{p}}{I_1} \tag{73}$$

8)

Seja Q uma variedade diferenciável de dimensão n e Σ uma distribuição de dimensão m dada localmente pelos Pfaffianos $\omega^1, \ldots, \omega^{n-m} \in \Gamma^1(Q)$, ou seja,

$$\Sigma = \ker\left(\omega^1\right) \cap \cdots \cap \ker\left(\omega^{n-m}\right) \tag{74}$$

Pretendemos mostrar que Σ é integrável sse $d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-m} = 0$ para $i = 1, \ldots, n-m$.

Mostremos primeiro a implicação directa. Suponhamos que a distribuição Σ é integrável. Pelo teorema de Frobenius sabemos que esta hipótese é equivalente a dizer que Σ é involutiva, isto é,

$$X, Y \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad [X, Y] \in \Sigma \tag{75}$$

Seja $i = 1, \ldots, n-m$. Então (75) é equivalente a

$$\omega^i(X) = 0\ ,\ \omega^i(Y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega^i([X, Y]) = 0 \tag{76}$$

Utilizando a fórmula de Cartan, a definição de $\omega\left(\mathcal{L}_X Y\right)$ e as igualdades (76) sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
d\omega^i(X, Y) &= X\rfloor d\omega^i(Y) = \left\{\mathcal{L}_X\omega^i - d\left(X\rfloor d\omega^i\right)\right\}(Y) = \mathcal{L}_X\omega^i(Y) - Y\left[\omega^i(X)\right] = \\
&= \mathcal{L}_X\left[\omega^i(Y)\right] - \omega^i\left(\mathcal{L}_X Y\right) - Y\left[\omega^i(X)\right] = \mathcal{L}_X\left[\omega^i(Y)\right] - \omega^i\left([X, Y]\right) - Y\left[\omega^i(X)\right] = 0
\end{aligned} \tag{77}$$

Portanto $d\omega^i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n-m$ quando restrito à distribuição Σ.

Uma vez que as $n-m$ 1-formas ω^i definem a distribuição Σ de dimensão m sabemos que são independentes. Construamos uma base acrescentando m 1-formas,

$$\left\{\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}, \omega^{n-m+1}, \ldots, \omega^n\right\} \tag{78}$$

e seja $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base dual. Então $\omega^i(\mathbf{e}_\alpha) = 0$ para $i = 1, \ldots, n-m$ e $\alpha = n-m+1, \ldots, n$. Logo, o conjunto de campos $\{\mathbf{e}_{n-m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ gera a distribuição Σ. Escrevendo $d\omega^i$ em termos da base de 1-formas fica

$$d\omega^i = \sum_{1\leq j\leq n-m} \lambda^i_j \wedge \omega^j + \sum_{n-m<\alpha<\beta} \mu^i_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \tag{79}$$

sendo os λ^i_j 1-formas e os coeficientes $\mu^i_{\alpha\beta}$ funções. Utilizando então o resultado (77) resulta

$$0 = d\omega^i(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \mu^i_{\alpha\beta} \qquad \Longrightarrow \qquad d\omega^i = \sum_{1\leq j\leq n-m} \lambda^i_j \wedge \omega^j \tag{80}$$

Daqui segue imediatamente o resultado pretendido, uma vez que $\omega \wedge \omega = 0$:

$$d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-m} = 0 \qquad\qquad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n-m \tag{81}$$

Provemos agora a implicação inversa. Suponhamos que $d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-m} = 0$ para $i = 1, \ldots, n-m$. Então, utilizando (79) temos

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{1\leq j\leq n-m} \lambda^i_j \wedge \omega^j + \sum_{n-m<\alpha<\beta} \mu^i_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \right) \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-m} = 0 \\ &\qquad \Longleftrightarrow \sum_{n-m<\alpha<\beta} \mu^i_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-m} = 0 \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \quad \mu^i_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq \beta \end{aligned} \tag{82}$$

donde podemos escrever

$$d\omega^i = \sum_{1\leq j\leq n-m} \lambda^i_j \wedge \omega^j \tag{83}$$

Sejam $X, Y \in \Sigma$. Então $\omega^i(X) = 0$ e $\omega^i(Y) = 0$, logo

$$d\omega^i(X,Y) = \sum_{1\leq j\leq n-m} \lambda^i_j \wedge \omega^j(X,Y) = \sum_{1\leq j\leq n-m} \left\{ \lambda^i_j(X) \otimes \omega^j(Y) - \lambda^i_j(Y) \otimes \omega^j(X) \right\} = 0 \tag{84}$$

e portanto, repetindo os cálculos efectuados anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = d\omega^i(X,Y) = \mathcal{L}_X \left[\omega^i(Y)\right] - \omega^i\left([X,Y]\right) - Y\left[\omega^i(X)\right] = -\omega^i\left([X,Y]\right) \\ \Longleftrightarrow \quad [X,Y] \in \Sigma \end{aligned} \tag{85}$$

Utilizando novamente o teorema de Frobenius concluímos que a distribuição Σ é integrável.

9)

Uma roda de raio R rolando no plano xOy sem escorregar define no espaço de configurações $Q = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ um vínculo não holónomo W que pode ser dado através dos Pfaffianos

$$\begin{cases} \omega^1 = dx - R\cos\varphi d\psi \\ \omega^2 = dy - R\sin\varphi d\psi \end{cases} \qquad W = \ker(\omega^1) \cap \ker(\omega^2) \tag{86}$$

Sejam $p = (\varphi_p, \psi_p, x_p, y_p)$ e $q = (\varphi_q, \psi_q, x_q, y_q)$ os pontos do espaço de configurações Q que pretendemos unir através de uma curva compatível com o vínculo.

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $x_p = y_p = y_q = 0$. Com efeito, basta fazer a seguinte transformação de coordenadas no espaço xOy

$$\begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & x' = (x - x_p)\cos\theta + (y - y_p)\sin\theta \\ y & \longrightarrow & y' = -(x - x_p)\sin\theta + (y - y_p)\cos\theta \end{array} \tag{87}$$

De acordo com (87) os Pfaffianos passam-se a escrever

$$\begin{cases} \omega^1 = \cos\theta dx + \sin\theta dy - R\cos(\varphi - \theta)\, d\psi \\ \omega^2 = -\sin\theta dx + \cos\theta dy - R\sin(\varphi - \theta)\, d\psi \end{cases} \tag{88}$$

Comecemos por notar que podemos ir de $p = (\varphi_p, \psi_p, 0, 0)$ para $p_1 = (0, \psi_p, 0, 0)$ ao longo da seguinte curva compatível com o vínculo:

$$c_1(t) = (\varphi_p(1-t), \psi_p, 0, 0) \qquad t \in [0,1] \tag{89}$$

c_1 é compatível com o vínculo, uma vez que:

$$\dot{c}_1(t) = -\varphi_p \frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad \omega^1(\dot{c}_1(t)) = \omega^2(\dot{c}_1(t)) = 0 \tag{90}$$

Deste modo alinhamos a roda com o eixo dos xx.

Podemos agora ir de $p_1 = (0, \psi_p, 0, 0)$ para $q_1 = (0, \psi_{q_1}, x_q, 0)$, onde $\psi_{q_1} = \psi_p + \frac{x_q}{R} \mod 2\pi$, ao longo da seguinte curva compatível com o vínculo:

$$c_2(t) = \left(0, \psi_p + \frac{x_q}{R}t, x_q t, 0\right) \qquad t \in [0,1] \tag{91}$$

De facto c_2 é compatível com o vínculo, uma vez que:

$$\begin{array}{rcl} \dot{c}_2(t) & = & +\dfrac{x_q}{R}\dfrac{\partial}{\partial\psi} + x_q\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \omega^1(\dot{c}_2(t)) & = & x_q\cos\theta - R\cos(0-\theta)\dfrac{x_q}{R} = 0 \\ \omega^2(\dot{c}_2(t)) & = & -x_q\sin\theta - R\sin(0-\theta)\dfrac{x_q}{R} = 0 \end{array} \tag{92}$$

Esta curva une os pontos $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e $(x_q, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Podemos também ir de $q_1 = (0, \psi_{q_1}, x_q, 0)$ para $q_2 = (0, \psi_q, x_q, 0)$ ao longo da seguinte curva compatível com o vínculo:

$$c_3(t) = (2\pi t\ ,\ \psi_{q_1} - (\psi_{q_1} - \psi_q)\, t\ ,\ x_q + r\sin(2\pi t)\ ,\ r\,[1 - \cos(2\pi t)]) \qquad t \in [0,1] \tag{93}$$

em que $r = \frac{R}{2\pi}(\psi_q - \psi_{q_1})$. Temos então

$$\begin{array}{rcl} \dot{c}_3(t) & = & 2\pi\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + (\psi_q - \psi_{q_1})\dfrac{\partial}{\partial\psi} + R(\psi_q - \psi_{q_1})\cos(2\pi t)\dfrac{\partial}{\partial x} + R(\psi_q - \psi_{q_1})\sin(2\pi t)\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \omega^1(\dot{c}_3(t)) & = & \cos\theta R(\psi_q - \psi_{q_1})\cos(2\pi t) + \sin\theta R(\psi_q - \psi_{q_1})\sin(2\pi t) - R\cos(2\pi t - \theta)(\psi_q - \psi_{q_1}) = \\ & = & R(\psi_q - \psi_{q_1})[\cos\theta\cos(2\pi t) + \sin\theta\sin(2\pi t) - \cos(2\pi t - \theta)] = 0 \\ \omega^1(\dot{c}_3(t)) & = & -\sin\theta R(\psi_q - \psi_{q_1})\cos(2\pi t) + \cos\theta R(\psi_q - \psi_{q_1})\sin(2\pi t) - R\sin(2\pi t - \theta)(\psi_q - \psi_{q_1}) = \\ & = & R(\psi_q - \psi_{q_1})[-\sin\theta\cos(2\pi t) + \cos\theta\sin(2\pi t) - \sin(2\pi t - \theta)] = 0 \end{array} \tag{94}$$

Portanto, c_3 é compatível com o vínculo. Esta curva corresponde a fazer a roda andar ao longo de uma circunferência de raio r de modo a alterar o ângulo ψ_{q_1} para ψ_q.

Finalmente podemos ir do ponto $q_2 = (0, \psi_q, x_q, 0)$ para $q = (\varphi_q, \psi_q, x_q, 0)$ simplesmente girando a roda em torno do seu eixo vertical, tal como fizemos com a curva c_1. Do mesmo modo, esta última curva c_4 é também compatível com o vínculo. Conseguimos assim ir de um ponto p para outro ponto q genéricos ao longo de quatro curvas, cada uma compatível com o vínculo.

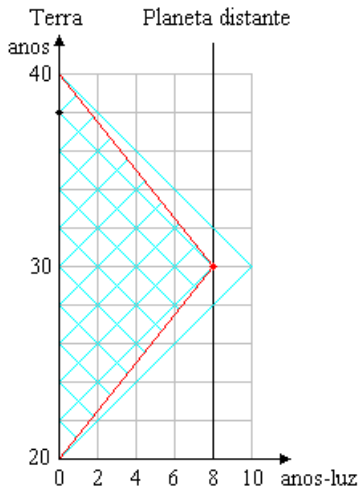
Definamos a curva $c : [0, 4] \longrightarrow Q$ através de

$$c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ c_2(t-1) & \text{se } t \in [1, 2] \\ c_2(t-2) & \text{se } t \in [2, 3] \\ c_2(t-3) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases} \tag{95}$$

Esta curva é diferenciável em todos os pontos excepto no conjunto $\{1, 2, 3\}$. No entanto, podemos facilmente construir uma curva C^∞ mudando a parametrização utilizando trechos de funções *cut off*. A curva assim obtida continua obviamente a unir os dois pontos p e q e é compatível com o vínculo W.

10)

A história dos eventos ocorridos neste problema está representada na seguinte figura.



(a) Sabemos que, do ponto de vista de Alice, as viagens de ida e de vinda de Bernardo levam 10 anos. O tempo, medido por Bernardo, que passa durante cada uma das viagens é dado pela fórmula da dilatação de Einstein

$$\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\cosh u} = \sqrt{1 - v^2}\Delta t_A = \sqrt{1 - (0.8)^2} \times 10 = 0.6 \times 10 = 6 \text{ anos} \tag{96}$$

Desprezando o tempo relativo à curta estadia, consluímos que Bernardo já não via a irmã à 12 anos (do seu ponto de vista) e portanto, no reencontro Bernardo tem 32 anos.

(b) A causa da assimetria nas idades é o facto de que o referancial de Alice é (aproximadamente) inercial enquanto que o referencial do Bernardo não é: quando Bernardo acaba a viagem de ida e inicia a viagem de volta o seu referencial apresenta aceleração face ao referencial de Alice e portanto não é inercial. De facto, podemos imaginar que Bernardo faz a viagem de ida num referencial inercial e quando chega ao planeta distante muda para outro referencial inercial de modo a poder voltar para a Terra.

(c) Sabemos que a informação que cada um dos gémeos obtém sobre o outro viaja à velocidade da luz $c = 1$. Deste modo, Alice só vê o seu irmão chegar ao planeta distante 8 anos depois de ele lá ter chegado. O evento "Alice vê Bernardo chegar ao planeta distante" está assinalado na figura 1 com uma bola negra no eixo do tempo. Assim, durante 18 anos Alice vê Bernardo afastar-se e nos restantes 2 anos vê o seu irmão aproximar-se.

Podemos também determinar a história dos eventos do ponto de vista do Bernardo. O evento "Bernardo vê Alice inverter o sentido da sua viagem (em relação a Bernardo)" está assinalado na figura 1 com uma bola vermelha sobre a trajectória do irmão. Assim, Bernardo vê a sua gémea afastar-se durante 6 anos e aproximar-se durante 6 anos também. Isto seria de esperar pois os dois referenciais inerciais sobre os quais Bernardo viaja estão em igualdade de circunstâncias.

Podemos agora determinar quanto tempo passa para cada um dos irmãos quando vêem passar um ano para o seu gémeo. Consideremos o ponto de vista de Alice. Nos primeiros 18 anos Alice viu passar 6 anos para o seu irmão, pelo que Alice envelhece 3 anos por cada ano que vê Bernardo envelhecer. Nos dois últimos anos Alice viu passar novamente 6 anos para o seu irmão, pelo que Alice envelhece $1/3$ anos $= 4$ meses por cada ano que vê Bernardo envelhecer.

Do ponto de vista do Bernardo, nos primeiros 6 este viu passar 2 anos para Alice, pelo que Bernardo envelhece 3 anos por cada ano que vê a sua irmã envelhecer. Nos últimos 6 anos o gémeo viu passar 18 anos para Alice, pelo que Bernardo envelhece $1/3$ anos $= 4$ meses por cada ano que vê a sua irmã envelhecer.

11)

(a) Seja R o referencial inercial associado à garagem e R' o referencial inercial associado ao automóvel. Dizer que o carro tem 5 metros de comprimento equivale a dizer que a medição do comprimento do carro *no seu referencial próprio* resulta em $l' = 5\ m$. O resultado da medição do comprimento do automóvel no referencial R é dado pela fórmula da contracção de Lorentz:

$$l = \frac{l'}{\cosh u} = \sqrt{1 - v^2} l' = \sqrt{1 - (0.8)^2} \times 5 = 0.6 \times 5 = 3\ m \tag{97}$$

Uma vez que no mesmo referencial R a garagem mede 4 metros de comprimento, podemos dizer que o carro tem espaço suficiente para caber dentro da garagem, instantaneamente. De facto, se fecharmos as portas da garagem imediatamente após a traseira do carro ter entrado podemos calcular quanto tempo temos para abrir as portas novamente sem que o veículo se esborrache contra a porta da frente:

$$0.8c = \frac{1\ m}{\Delta t} \qquad \Delta t = \frac{1\ m}{0.8 \times (3 \times 10^8\ m.s^{-1})} = \frac{1}{24 \times 10^7}\ s \approx 4.16\ ns \tag{98}$$

Portanto conseguimos ter o automóvel fechado dentro da garagem durante cerca de 4.16 nanosegundos.

(b) O comprimento da garagem medido no referencial do carro R' é

$$L' = \frac{L}{\cosh u} = \sqrt{1 - v^2} L = \sqrt{1 - (0.8)^2} \times 4 = 0.6 \times 4 = 2.4\ m \tag{99}$$

O automóvel mede 5 metros neste referencial pelo que não é possível que o carro esteja alguma vez dentro da garagem, para este observador. Estes factos não entram em contradição pois quando o observador da garagem fecha as portas "ao mesmo tempo" o que o observador do carro vê é que a porta da frente fechou e abriu *antes* da porta de trás, permitindo assim que a viatura passasse. Portanto, este aparente paradoxo tem a sua explicação no facto de o conceito de simultaneidade não ser absoluto.

12)

Suponhamos que uma partícula se move com velocidade w no referencial $t'Ox'$ e que este referencial se move com velocidade v em relação ao referencial tOx. Definamos as matrizes de mudança de base

$$S_v = \begin{pmatrix} \gamma_v & v\gamma_v \\ v\gamma_v & \gamma_v \end{pmatrix} \qquad S_w = \begin{pmatrix} \gamma_w & w\gamma_w \\ w\gamma_w & \gamma_w \end{pmatrix} \tag{100}$$

onde $\gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2}$ e $\gamma_w = 1/\sqrt{1-w^2}$. Então a matriz mudança de base do referencial próprio da partícula para o refencial tOx é (designando por u a velocidade da partícula em relação ao referencial tOx)

$$S_u = S_v S_w = \begin{pmatrix} \gamma_v\gamma_w\,(1+wv) & \gamma_v\gamma_w\,(w+v) \\ \gamma_v\gamma_w\,(w+v) & \gamma_v\gamma_w\,(1+wv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & u\gamma_u \\ u\gamma_u & \gamma_u \end{pmatrix} \tag{101}$$

Logo,

$$u = \frac{w+v}{1+wv} \tag{102}$$

$$\gamma_u = \gamma_v\gamma_w\,(1+wv) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,(1+wv) = \frac{1+wv}{\sqrt{1+w^2v^2-w^2-v^2}} =$$

$$= \frac{1+wv}{\sqrt{(1+wv)^2-(w+v)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w+v}{1+vw}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tag{103}$$

A fórmula de composição das velocidades (102) permite conucluir que quando uma partícula se move à velocidade da luz num referencial ($w = \pm 1$) move-se também à velocidade da luz num outro qualquer referencial inercial:

$$u = \frac{\pm 1 + v}{1 \pm v} = \pm 1 \tag{104}$$

13)

Sejam $p, q \in \mathbb{R}^4$ dois acontecimentos unidos por uma linha recta do tipo tempo l. Podemos então (por mudança de referencial) considerar que p e q são acontecimentos situados sobre o eixo do tempo sem perda de generalidade. Nesse caso $l(t) = t\frac{\partial}{\partial t}$ e $l(a) = p,\ l(b) = q$. Assim o tempo próprio medido ao longo de l é

$$\tau(l(a), l(b)) = \int_a^b \left|\dot{l}(t)\right| dt = \int_a^b dt = b - a \tag{105}$$

Consideremos outra curva do tipo tempo $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que passa pelos acontecimentos p e q, ou seja, satisfazendo $c(a) = p,\ c(b) = q$.

$$c(t) = t\frac{\partial}{\partial t} + x(t)\frac{\partial}{\partial x} + y(t)\frac{\partial}{\partial y} + z(t)\frac{\partial}{\partial z} \tag{106}$$

O tempo próprio medido ao longo de c é

$$\tau(c(a), c(b)) = \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt \tag{107}$$

Utilizando a desigualdade triangular invertida obtemos

$$\tau(c(a), c(b)) = \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt \leq \int_a^b \left\{\left|\dot{l}(t) + \dot{c}(t)\right| - \left|\dot{l}(t)\right|\right\} dt = \int_a^b \left|\dot{l}(t) + \dot{c}(t)\right| dt - \int_a^b \left|\dot{l}(t)\right| dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{2^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}dt - \int_a^b dt \leq \int_a^b 2dt - \int_a^b dt = \int_a^b dt = b - a \tag{108}$$

Concluímos assim que $\tau(c(a), c(b)) < \tau(l(a), l(b))$, ou seja, que o tempo próprio medido ao longo de l é maior que o tempo próprio medido ao longo de qualquer outra curva, diferente de l (e portanto $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) > 0$ para algum t), passando pelos acontecimentos p e q.

14)

(a)

No referencial próprio do observador, a sua trajectória coincide com o eixo do tempo. Se um som é emitido no ponto p esse sinal vai-se propagar para o futuro com inclinação de 45^oem relação ao eixo do tempo. Portanto, $\partial J^+(p)$ representa a frente de onda. O sinal propagado vai atingir o observador quando $\partial J^+(p)$ intersectar o eixo do tempo, logo

$$\tau(p) = t\left(\partial J^+(p) \cap \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{109}$$

Obviamente, todos os pontos de onde se pode emitir um sinal que chegue ao observador no instante t são dados pelo cone do passado do evento $t\frac{\partial}{\partial t}$, portanto

$$\tau^{-1}(t) = \partial J^-\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{110}$$

(b)

Seja $c(s) = (t(s), x(s), y(s), z(s))$. Então

$$\dot{c}(s) = \dot{t}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{111}$$

$$\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle = -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{112}$$

$$\left\langle \dot{c}(t), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = -\dot{t} \tag{113}$$

Para a partícula se propagar para o futuro tem que ser $\dot{t} > 0$, ou seja,

$$\left\langle \dot{c}(t), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle < 0 \tag{114}$$

Para a partícula ter velocidade superior à do som tem que ser

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > \dot{t}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle > 0 \tag{115}$$

(c)

Sendo t o parâmetro da curva tem-se

$$\frac{d\tau}{dt} = \dot{c}\cdot\tau \tag{116}$$

No caso em que c é tangente a uma superfície $\tau = c^{te}$ ficamos com

$$\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = 0 \tag{117}$$

o que significa que o observador ouve o som produzido durante um intervalo Δt num intervalo de tempo muito pequeno $\Delta\tau$ parecendo por isso um estrondo.

Se c é uma recta, à medida que vamos "subindo" o cone do passado vai haver um instante em que c é tangente ao cone esse é o instante em que o observador ouve o estrondo. Antes desse acontecimento o silêncio é total. Após o estrondo, o observador ouve simultaneamente dois sons porque a recta intersecta o cone em dois pontos: ouve o som relativo à trajectória do avião depois do ponto de tangência com o cone do som e ouve o som relativo à trajectória do avião antes do ponto de tangência com o cone ("de trás para a frente").

(d)

Quando um avião ultrapassa a velocidade do som na vizinhança do observador o que acontece à medida que vamos subindo o cone do som é o seguinte: inicialmente a trajectória do avião começa no interior do cone e "corta" o cone num só ponto. Lembrando que para passar a velocidade do som a trajectória terá que ficar com inclinação inferior a 1 notamos que a certo momento essa parte da curva é tangente ao cone, produzindo assim um estrondo. Se subirmos mais ainda o cone, haverá outra altura em que a curva é novamente tangente ao cone, desta vez pelo lado interior. Aqui produz-se novo estrondo somando um total de dois estrondos ensurdecedores.

15)

Seja $L \in O_+^{\uparrow}(3,1)$, isto é, $\det L = 1$ e

$$L\eta L^T = \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad L \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} L^T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{118}$$

A condição $L\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$ implica que

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad L_{00} = 1 \tag{119}$$

Substituíndo a condição (119) na equação resultante da primeira linha e primeira coluna da equação matricial (118) obtemos

$$\begin{aligned} -L_{00}^2 + L_{01}^2 + L_{02}^2 + L_{03}^2 &= -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 + L_{01}^2 + L_{02}^2 + L_{03}^2 = -1 \qquad \Longleftrightarrow \\ L_{01}^2 + L_{02}^2 + L_{03}^2 &= 0 \qquad\quad \Longrightarrow \qquad\quad L_{01} = L_{02} = L_{03} = 0 \end{aligned} \tag{120}$$

De forma idêntica podemos provar que $L_{10} = L_{20} = L_{30} = 0$ e portanto a matriz L é da seguinte forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{L} \end{pmatrix} \tag{121}$$

onde $\widetilde{L}$ é uma matriz 3×3. A condição $\det L = 1$ implica então $\det \widetilde{L} = 1$ e a condição $L\eta L^T = \eta$ implica

$$\widetilde{L}\, id\, \widetilde{L}^T = \widetilde{L}\, \widetilde{L}^T = id \tag{122}$$

ou seja, $\widetilde{L} \in SO(3)$. De modo inverso, se $\widetilde{M}$ for um elemento de $SO(3)$ tem-se que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{M} \end{pmatrix} \tag{123}$$

pertence a $O_+^{\uparrow}(3,1)$ e também que $M\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$, logo existe um isomorfismo

$$SO(3) \simeq \left\{ L \in O_+^{\uparrow}(3,1) : L\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \right\} \tag{124}$$

Sabemos, das aulas, que existe um homomorfismo $h : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow O_+^{\uparrow}(3,1)$ dado por

$$h(g)v = H^{-1}\left(gH(v)g^*\right) \tag{125}$$

onde

$$\begin{aligned} H \quad &: \qquad \mathbb{R}^4 \qquad \longrightarrow \qquad \mathbb{H}_{2\times 2} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : A^* = A\} \\ v \quad &= \quad v^0\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x} + v^2\frac{\partial}{\partial y} + v^3\frac{\partial}{\partial z} \quad \mapsto H(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{126}$$

No entanto, se $g \in SU(2)$ e $v = \frac{\partial}{\partial t}$ temos

$$h(g)\frac{\partial}{\partial t} = H^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Id\right) = \frac{\partial}{\partial t} \tag{127}$$

ou seja, $h(g) \in \left\{L \in O_+^{\uparrow}(3,1) : L\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\right\} \simeq SO(3)$. Concluímos assim que existe homomorfismo $h' : SU(2) \longrightarrow SO(3)$. h' é a restrição de h a $SU(2)$ Da expressão (125) concluímos que $\ker h' = \{\pm id\}$.

As matrizes de $SU(2)$ são dadas por

$$SU(2) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \in SL(2,\mathbb{C}) : AA^{\dagger} = id\right\} \tag{128}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\overline{c} + b\overline{d} = 0 \\ ad - bc = 0 \end{cases} \tag{129}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \tag{130}$$

A imposição $\det A = 1$ origina a relação

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{131}$$

que define a esfera S^3. Logo $SU(2)$ é difeomorfo a S^3. Portanto $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm id\}$ é difeomorfo a $S^3/\{\pm id\} \simeq \mathbb{R}P^3$. Sendo S^3 simplesmente conexo, concluímos que $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$.

16)

Consideremos que a Alice na Terra escolhe um referencial em que o eixo dos zz aponta para o centro do Sol. Seja θ o ângulo que máximo que um raio luminoso emitido pelo Sol faz com o eixo dos zz. Na esfera celeste da Alice ela pode identificar o ponto

$$\begin{cases} x = -\frac{v^1}{v^0} = \sin\theta \\ y = -\frac{v^2}{v^0} = 0 \\ z = -\frac{v^3}{v^0} = \cos\theta \end{cases} \tag{132}$$

com um ponto do Sol que emite um raio luminoso com a direcção desejada. A projecção estereográfica deste ponto é

$$\zeta = \frac{x}{1-z} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \tag{133}$$

Consideremos agora o ponto de vista do Bernardo que se afasta do Sol (numa vizinhança da Terra) a uma velocidade v. Sabemos que as esferas celestes de Alice e Bernardo estão relacionadas através da transformação de Möbius

$$\zeta' = \frac{\overline{a}\zeta + \overline{c}}{\overline{b}\zeta + \overline{d}} \tag{134}$$

via projecção estereográfica, onde a transformação de Lorentz é dada por

$$L = h(g) = h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{135}$$

No caso presente estamos interessados numa mudança de coordenadas para um observador inercial que se move com velocidade $v = \tanh u$ na direcção do eixo dos zz. Vimos nas aulas que a matriz que representa essa transformação é

$$g = \begin{pmatrix} e^{u/2} & 0 \\ 0 & e^{-u/2} \end{pmatrix} \tag{136}$$

Assim, a equação (134) reduz-se a

$$\zeta' = \frac{e^{u/2}\zeta}{e^{-u/2}} = e^u\zeta \tag{137}$$

A relação entre a projecção estereográfica e o diâmetro angular para o referencial do Bernardo será igual ao do referencial da Alice:

$$\begin{aligned}
\zeta' &= \frac{x'}{1-z'} = \frac{\sin\theta'}{1-\cos\theta'} = \frac{\sin\theta'}{1-\sqrt{1-\sin^2\theta'}}\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\theta'}}{1+\sqrt{1-\sin^2\theta'}} = \frac{\sin\theta'\left(1+\sqrt{1-\sin^2\theta'}\right)}{1-\left(1-\sin^2\theta'\right)} = \\
&= \frac{\sin\theta'\left(1+\sqrt{1-\sin^2\theta'}\right)}{\sin^2\theta'} = \frac{1+\sqrt{1-\sin^2\theta'}}{\sin\theta'} \qquad (138)\\
&\iff \zeta'\sin\theta'-1=\sqrt{1-\sin^2\theta'} \iff \zeta'^2\sin^2\theta'+1-2\zeta'\sin\theta'=1-\sin^2\theta' \\
&\iff \left(\zeta'^2+1\right)\sin^2\theta'-2\zeta'\sin\theta'=0 \iff \sin\theta'=\frac{2\zeta'}{\zeta'^2+1} \iff \theta'=\arcsin\left(\frac{2\zeta'}{\zeta'^2+1}\right) \qquad (139)
\end{aligned}$$

Substituíndo então as fórmulas (133) e (137) ficamos com

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{2e^u\zeta}{e^{2u}\zeta^2+1}\right) = \arcsin\left(\frac{2e^u\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}}{e^{2u}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2+1}\right) = \arcsin\left(\frac{2\left(e^u\sin\theta\right)\left(1-\cos\theta\right)}{\left(e^u\sin\theta\right)^2-\left(1-\cos\theta\right)^2}\right) \qquad (140)$$

Uma vez que Bernardo se afasta do Sol a 96% da velocidade da luz temos $v=-0.96$ e portanto

$$u = \operatorname{arctan\,h}\, v \approx -1.946 \qquad \iff \qquad e^u \approx 0.143 \qquad (141)$$

Sendo $\theta = 0.25^o$ temos finalmente

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{2\left(0.143\sin 0.25^o\right)\left(1-\cos 0.25^o\right)}{\left(0.143\sin 0.25^o\right)^2-\left(1-\cos 0.25^o\right)^2}\right) \approx 1.749^o \qquad (142)$$

Portanto, o Bernardo mede um diâmetro angular igual a $2\theta' \approx 3.5^o$, cerca de 7 vezes maior que o diâmetro angular medido por Alice.

17)

(a)

Considere-se uma partícula de massa m e carga e movendo-se ao longo do eixo dos xx sob a acção de um campo eléctrico $\mathbf{E} = E\frac{\partial}{\partial x}$. Se no instante inicial a partícula tiver velocidade apenas segundo $\frac{\partial}{\partial x}$ o movimento pode ser estudado apenas no plano $\mathbb{R}^2 \ni (t,x)$, uma vez que não existem forças a actuar segundo as direcções $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$. Como $\mathbf{B}=0$, a força de Lorentz escreve-se

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{e}{m}\sqrt{1+\mathbf{u}^2}E\frac{\partial}{\partial x} \qquad \iff \qquad \frac{du}{d\tau} = \frac{eE}{m}\sqrt{1+u^2} \qquad (143)$$

Concretizando a mudança de variável $u = \sinh\omega$ obtemos

$$\frac{du}{d\tau} = \cosh\omega\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{eE}{m}\sqrt{1+\sinh^2\omega} = \frac{eE}{m}\cosh\omega \qquad \iff \qquad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{eE}{m} \qquad (144)$$

cuja solução é

$$\omega(\tau) = \frac{eE}{m}\tau+\omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad u(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = \sinh\left(\frac{eE}{m}\tau+\omega_0\right) \qquad (145)$$

Impondo a condição $\frac{dx}{d\tau}(0)=0$ ficamos com

$$\frac{dx}{d\tau} = \sinh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) \qquad (146)$$

A integração desta equação resulta em

$$x(\tau) = \frac{m}{eE}\cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) + x_0 \tag{147}$$

Impondo a condição $x(0) = 0$ obtemos

$$x(\tau) = \frac{m}{eE}\left[\cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) - 1\right] \tag{148}$$

Para determinar $t = t(\tau)$ recorremos à seguinte relação

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \gamma = \sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{eE}{m}\tau\right)} = \cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) \\ \Longrightarrow &\quad \int dt = \int \cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad t(\tau) = \frac{m}{eE}\sinh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) \end{aligned} \tag{149}$$

sendo $t(0) = 0$. Portanto a trajectória da partícula no espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^2$ é

$$c(\tau) = \left(\frac{m}{eE}\sinh\left(\frac{eE}{m}\tau\right)\ ,\ \frac{m}{eE}\left[\cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) - 1\right]\right) \tag{150}$$

(b)

Da alínea anterior podemos concluir que

$$\dot{c}(\tau) = \cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right)\frac{\partial}{\partial t} + \sinh\left(\frac{eE}{m}\tau\right)\frac{\partial}{\partial x} \tag{151}$$

$$\ddot{c}(t) = \frac{eE}{m}\sinh\left(\frac{eE}{m}\tau\right)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{eE}{m}\cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right)\frac{\partial}{\partial x} \tag{152}$$

Assim sendo

$$\langle \dot{c}(\tau), \ddot{c}(t)\rangle = -\frac{eE}{m}\cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right)\sinh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) + \frac{eE}{m}\sinh\left(\frac{eE}{m}\tau\right)\cosh\left(\frac{eE}{m}\tau\right) = 0 \tag{153}$$

$$\begin{aligned} |\ddot{c}(\tau)| &= \langle \ddot{c}(\tau), \ddot{c}(t)\rangle^{1/2} = \sqrt{-\left(\frac{eE}{m}\right)^2\sinh^2\left(\frac{eE}{m}\tau\right) + \left(\frac{eE}{m}\right)^2\cosh^2\left(\frac{eE}{m}\tau\right)} = \\ &= \frac{eE}{m}\sqrt{\cosh^2\left(\frac{eE}{m}\tau\right) - \sinh^2\left(\frac{eE}{m}\tau\right)} = \frac{eE}{m} \end{aligned} \tag{154}$$

A aceleração no referencial próprio escreve-se da seguinte forma:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{u}}{d\tau} = \frac{e}{m}\left[(1+\overrightarrow{u})^{1/2}\,\overrightarrow{E} + \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{B}\right] \tag{155}$$

No caso em que o campo magnético é nulo ($\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$) e considerando o referencial inercial onde a partícula se encontra instantaneamente em repouso ($\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$) a equação acima reduz-se a

$$\overrightarrow{a} = \frac{e}{m}\overrightarrow{E} \tag{156}$$

Logo

$$|\ddot{c}(\tau)| = \frac{eE}{m} = a \tag{157}$$

(c)

A aceleração constante g deste problema corresponde à aceleração constante eE/m da alínea anterior. Fazendo esta substituição obtemos a trajectória da nave:

$$c(\tau) = \left(\frac{1}{g} \sinh(g\tau) \ , \ \frac{1}{g} \left[\cosh(g\tau) - 1 \right] \right) \tag{158}$$

O tempo próprio que a nave demoraria a alcançar o centro da galáxia, ou seja, a percorrer 30 000 anos-luz é então fornecido por

$$\begin{aligned} x(\tau) \quad &= \quad \frac{1}{g} \left[\cosh(g\tau) - 1 \right] = 30000 \quad \iff \quad \cosh(g\tau) = 30000g + 1 \\ &\iff \quad \cosh(\tau) \approx 30001 \quad \iff \quad \tau \approx 11.0021 \ anos \end{aligned} \tag{159}$$

ao que corresponderia um tempo passado na Terra igual a

$$t(11) = \frac{1}{g} \sinh(g11.0021) \approx \sinh(11.0021) \approx 30001 \ anos \tag{160}$$

o que significa que a nave faz grande parte da viagem a velocidades muito próximas da da luz.

18)

(a)

Uma vez que Bernardo parte a 80% da velocidade da luz, isso significa que percorre 0.8 anos-luz durante 1 ano (do ponto de vista de Alice). Para percorrer 1 ano-luz e assim reencontrar a irmã terá que passar um tempo igual a

$$\Delta t = \frac{1}{0.8} = \frac{5}{4} = 1.25 \ anos \tag{161}$$

Portanto, a idade de Alice no reencontro é igual a 21 anos e 3 meses.

O tempo que passou entre os dois encontros medido no referencial do Bernardo é calculado através da fórmula da dilatação do tempo:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\cosh u} = \sqrt{1 - 0.8^2} \Delta t = \frac{6}{10} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 \ anos \tag{162}$$

Logo, a idade do Bernardo no reencontro é igual a 20 anos e 9 meses.

(b)

O que explica a assimetria nas idades é que os dois gémeos não estão de facto em igualdade de circunstâncias. Ambos os irmãos têm associados referenciais inerciais uma vez que são observadores em queda livre (as suas trajectórias são geodésicas de $(\mathcal{C}, \langle , \rangle)$ pois as geodésicas da métrica de Minkowski são todas as rectas). No entanto, as trajectórias de Alice e Bernardo pertencem a classes distintas de homotopia, ou seja, as trajectórias não são homotopicamente equivalentes. Com efeito, na relatividade restrita apenas a estrutura local do espaço-tempo tem influência nas trajectórias (geodésicas) enquanto que na relatividade geral, a estrutura global (topologia) do espaço-tempo tem importância. Assim, saber qual dos gémeos é mais novo quando os irmãos se reencontram permite saber qual dos dois é que percorreu o universo e qual dos dois é que ficou parado.

19)

Considere-se o elemento de linha do espaço de Minkowski em coordenadas cilíndricas,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{163}$$

O campo vectorial $T = \frac{\partial}{\partial t}$ é um campo de Killing para a métrica definida por (163):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T g &= \mathcal{L}_T \left\{ -dt \otimes dt + dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(-1) dt \otimes dt + \frac{\partial}{\partial t}(1) dr \otimes dr + \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\right) d\varphi \otimes d\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(1) dz \otimes dz = 0 \end{aligned} \tag{164}$$

Façamos então a mudança de coordenadas $\theta = \varphi - \omega t$. Então tem-se $d\varphi = d\theta + \omega dt$ e o elemento de linha passa-se a escrever

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta + \omega dt\right) \otimes \left(d\theta + \omega dt\right) + dz^2 = \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \omega^2 dt^2 + \omega d\theta \otimes dt + \omega dt \otimes d\theta\right) + dz^2 = \\ &= -\left(1 - r^2\omega^2\right) dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + 2r^2 \omega \, dt d\theta + dz^2 \end{aligned} \tag{165}$$

O campo vectorial T continua a ser um campo de Killing para a métrica definida por (165):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T g' &= \mathcal{L}_T \left\{ -\left(1 - r^2\omega^2\right) dt \otimes dt + dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \omega \, dt \otimes d\theta + r^2 \omega \, d\theta \otimes dt + dz \otimes dz \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\omega^2 - 1\right) dt \otimes dt + \frac{\partial}{\partial t}(1) dr \otimes dr + \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\right) d\theta \otimes d\theta + \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\omega\right) \, dt \otimes d\theta + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\omega\right) \, d\theta \otimes dt + \frac{\partial}{\partial t}(1) dz \otimes dz \\ &= 0 \end{aligned} \tag{166}$$

A imposição de T ser um campo do tipo tempo equivale a

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -\left(1 - r^2\omega^2\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2\omega^2 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad r < \frac{1}{\omega} \tag{167}$$

Portanto, na região aberta $r < \frac{1}{\omega}$ temos um campo de Killing que é do tipo tempo, ou seja, esta região é por definição uma região estacionária.

Determinemos agora a métrica da variedade espacial.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - r^2\omega^2\right) dt^2 + 2r^2\omega \, dt d\theta + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = \\ &= \left(r^2\omega^2 - 1\right) \left(dt + \frac{r^2\omega}{r^2\omega^2 - 1} d\theta\right)^2 - \frac{\left(r^2\omega\right)^2}{r^2\omega^2 - 1} d\theta^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = \\ &= \left(r^2\omega^2 - 1\right) \left(dt + \frac{r^2\omega}{r^2\omega^2 - 1} d\theta\right)^2 + dr^2 + \frac{r^2\left(r^2\omega^2 - 1\right) - r^4\omega^2}{r^2\omega^2 - 1} d\theta^2 + dz^2 = \\ &= \left(r^2\omega^2 - 1\right) \left(dt + \frac{r^2\omega}{r^2\omega^2 - 1} d\theta\right)^2 + dr^2 + \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2} d\theta^2 + dz^2 \end{aligned} \tag{168}$$

Logo a métrica de variedade espacial é

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2} d\theta^2 + dz^2 \tag{169}$$

Uma vez que $g'_{00} = -\left(1 - r^2\omega^2\right) < 0$ na região estacionária, podemos escrever

$$1 - r^2\omega^2 = e^{2\phi} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi = \ln\sqrt{1 - r^2\omega^2} \tag{170}$$

Se definirmos também a 1-forma

$$A = \frac{r^2\omega}{r^2\omega^2 - 1} d\theta \tag{171}$$

podemos reescrever a métrica (168) na forma

$$ds^2 = -e^{2\phi}\left(dt + A\right)^2 + dr^2 + \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2}d\theta^2 + dz^2 \tag{172}$$

A forma G é obtida através de

$$G = -d\phi = -\frac{d}{dr}\left(\ln\sqrt{1 - r^2\omega^2}\right)dr = \frac{\frac{d}{dr}\left(-\sqrt{1 - r^2\omega^2}\right)}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}dr = \frac{\frac{r\omega^2}{\sqrt{1-r^2\omega^2}}}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}dr = \frac{r\omega^2}{1 - r^2\omega^2}dr \tag{173}$$

e o campo $\mathbf{G}$ através de

$$\mathbf{G} = i_1^{-1}\left(G\right) = i_1^{-1}\left(\frac{r\omega^2}{1 - r^2\omega^2}dr\right) = \frac{r\omega^2}{1 - r^2\omega^2}\frac{\partial}{\partial r} \tag{174}$$

Definimos também a 2-forma H:

$$\begin{aligned} H &= -e^{\phi}dA = -\sqrt{1 - r^2\omega^2}d\left(\frac{r^2\omega}{r^2\omega^2 - 1}d\theta\right) = -\sqrt{1 - r^2\omega^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\omega}{r^2\omega^2 - 1}\right)dr \wedge d\theta = \\ &= -\sqrt{1 - r^2\omega^2}\frac{2r\omega\left(r^2\omega^2 - 1\right) - r^2\omega 2r\omega^2}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^2}dr \wedge d\theta = \sqrt{1 - r^2\omega^2}\frac{2r\omega}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^2}dr \wedge d\theta = \\ &= \frac{2r\omega}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^{3/2}}dr \wedge d\theta \end{aligned} \tag{175}$$

Notamos agora que estamos a utilizar a seguinte base de formas

$$\left\{dr, \frac{r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}d\theta, dz\right\} \tag{176}$$

que é a base dual de

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \tag{177}$$

Logo o campo $\mathbf{H}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= i_2^{-1}\left(H\right) = i_2^{-1}\left(\frac{2r\omega}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^{3/2}}dr \wedge d\theta\right) = i_2^{-1}\left(\frac{2\omega}{1 - r^2\omega^2}dr \wedge \left(\frac{r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}d\theta\right)\right) = \\ &= \frac{2\omega}{1 - r^2\omega^2}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{178}$$

Para finalizar, verificamos a identidade vectorial

$$\widehat{\nabla} \times \mathbf{H} = 2\mathbf{G} \times \mathbf{H} \tag{179}$$

calculando cada um dos membros e verificando que são iguais:

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla} \times \mathbf{H} &= i_2^{-1}\left(d\, i_1(\mathbf{H})\right) = i_2^{-1}\left[d\left(\frac{2\omega}{1 - r^2\omega^2}dz\right)\right] = i_2^{-1}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{2\omega}{1 - r^2\omega^2}\right)dr \wedge dz\right] = \\ &= i_2^{-1}\left[-\frac{4\omega^3 r}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^2}dz \wedge dr\right] = -\frac{4\omega^3 r}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^2}\frac{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} = \\ &= -\frac{4\omega^3}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{180}$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{G} \times \mathbf{H} &= 2\frac{r\omega^2}{1 - r^2\omega^2}\frac{2\omega}{1 - r^2\omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} \times \frac{\partial}{\partial z}\right) = -\frac{4\omega^3 r}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^2}\left(\frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial}{\partial r}\right) = \\ &= -\frac{4\omega^3 r}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^2}\frac{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{4\omega^3}{\left(1 - r^2\omega^2\right)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{181}$$

20)

No vácuo, as equações de Einstein tomam a seguinte forma

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{\nabla}\cdot\mathbf{G}=\mathbf{G}^2+\frac{1}{2}\mathbf{H}^2 \\ \widehat{\nabla}\times\mathbf{H}=2\mathbf{G}\times\mathbf{H} \\ \widehat{R}_{ij}+\widehat{\nabla}_i G_j=G_iG_j+\frac{1}{2}H_iH_j-\frac{1}{2}\mathbf{H}^2\gamma_{ij} \end{array}\right. \tag{182}$$

onde γ_{ij} são as componentes da métrica da variedade espacial. Contraíndo a última equação de (182) resulta

$$\widehat{R}+\widehat{\nabla}\cdot\mathbf{G}=\mathbf{G}^2+\frac{1}{2}\mathbf{H}^2-\frac{3}{2}\mathbf{H}^2 \tag{183}$$

Utilizando a primeira equação de (182), a equação (183) reduz-se a

$$\widehat{R}=-\frac{3}{2}\mathbf{H}^2 \tag{184}$$

Soluções estacionárias das equações de Einstein satifazem então

$$\mathbf{H}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{R}=\widehat{R}_{rr}+\widehat{R}_{\theta\theta}+\widehat{R}_{\varphi\varphi}=0 \tag{185}$$

Para uma variedade 3-dimensional esfericamente simétrica com elemento de linha

$$dl^2=A^2(r)dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{186}$$

tem-se

$$\widehat{R}_{rr}=\frac{2A'}{rA^3} \qquad\qquad \widehat{R}_{\theta\theta}=\widehat{R}_{\varphi\varphi}=\frac{A'}{rA^3}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{A^2}\right) \tag{187}$$

Substituíndo (187) em (185) obtemos

$$\frac{2A'}{rA^3}+2\left(\frac{A'}{rA^3}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)\right)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2rA'+A^3-A=0 \tag{188}$$

A equação diferencial (188) é separável:

$$\frac{A'}{A-A^3}=\frac{1}{2r} \quad\Longleftrightarrow\quad \int\frac{A'}{A-A^3}dr=\int\frac{1}{2r} \quad\Longleftrightarrow\quad \int\frac{1}{A-A^3}dA=\frac{1}{2}\ln|r|+k \tag{189}$$

Para integrar o primeiro membro de (189) decompomos a função integranda em fracções simples:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{A-A^3} & = & \dfrac{1}{A(1+A)(1-A)}=\dfrac{a}{A}+\dfrac{b}{1+A}+\dfrac{c}{1-A}= \\ & = & \dfrac{a(1+A)(1-A)+bA(1-A)+cA(1+A)}{A(1+A)(1-A)}= \\ & = & \dfrac{A^2(c-b-a)+A(b+c)+a}{A-A^3} \\ & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b+c=0 \\ c-b-a=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array} \tag{190}$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int\frac{1}{A-A^3}dA & = & \displaystyle\int\frac{1}{A}dA-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+A}dA+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-A}dA= \\ & = & \ln|A|-\ln\sqrt{|1+A|}+\ln\sqrt{|1-A|}=\ln\frac{|A|}{\sqrt{|1-A^2|}} \end{array} \tag{191}$$

Substituíndo então (191) na equação (189) obtemos

$$\begin{array}{rcl} \ln\dfrac{|A|}{\sqrt{|1-A^2|}} & = & \ln\sqrt{|r|}+k \quad\Longleftrightarrow\quad \dfrac{|A|}{\sqrt{|1-A^2|}}=c''\sqrt{|r|} \quad\Longleftrightarrow\quad \dfrac{A^2}{|1-A^2|}=c'|r| \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{A^2}{1-A^2}=cr \quad\Longleftrightarrow\quad A^2=cr\left(1-A^2\right) \quad\Longleftrightarrow\quad A^2(r)=\dfrac{cr}{1+cr} \end{array} \tag{192}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Vemos que a solução obtida é válida para $r < -1/c$ ou para $r > -1/c$. De modo a atribuir um significado físico à constante c costuma-se escrever $-1/c = 2m$, sendo m a massa total da estrela, fonte do campo gravitacional, vezes a constante gravitacional de Newton. Deste modo, a métrica da variedade espacial (186) escreve-se

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{193}$$

Determinemos agora a componente temporal da métrica da variedade 4-dimensional. Escrevemos

$$ds^2 = -\lambda^2(r)dt^2 + dl^2 = -\lambda^2(r)dt^2 + A^2(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{194}$$

e consideramos a base ortonormada de formas $\{\omega^t, \omega^r, \omega^\theta, \omega^\varphi\} = \{i\lambda dt, Adr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi\}$.Utilizando a primeira equação estrutural de Cartan obtemos as seguintes expressões para as formas de conexão:

$$\omega^t_r = \frac{\lambda'}{\lambda A}\omega^t \qquad \omega^r_\theta = -\frac{1}{rA}\omega^\theta \qquad \omega^r_\varphi = -\frac{1}{rA}\omega^\varphi \qquad \omega^\theta_\varphi = -\frac{1}{r\tan\theta}\omega^\varphi \tag{195}$$

Todas as formas de conexão que não estão relacionadas com nenhuma acima por troca de índices são nulas. Utilizando a segunda equação estrutural de Cartan obtemos as formas de curvatura:

$$\begin{gathered}
\Omega^t_r = \frac{1}{\lambda A}\frac{d}{dr}\left(\frac{\lambda'}{A}\right)\omega^t \wedge \omega^r \qquad \Omega^t_\theta = \frac{\lambda'}{r\lambda A^2}\omega^t \wedge \omega^\theta \qquad \Omega^t_\varphi = \frac{\lambda'}{r\lambda A^2}\omega^t \wedge \omega^\varphi \\
\Omega^r_\theta = -\frac{A'}{rA^3}\omega^r \wedge \omega^\theta \qquad \Omega^r_\varphi = -\frac{A'}{rA^3}\omega^r \wedge \omega^\varphi \qquad \Omega^\theta_\varphi = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right)\omega^\theta \wedge \omega^\varphi
\end{gathered} \tag{196}$$

Como de costume, lemos as componentes do tensor de Riemann das expressões das formas de curvatura:

$$R^t{}_{rtr} = \frac{1}{\lambda A}\frac{d}{dr}\left(\frac{\lambda'}{A}\right) \quad R^t{}_{\theta t\theta} = R^t{}_{\varphi t\varphi} = \frac{\lambda'}{r\lambda A^2} \quad R^r{}_{\theta r\theta} = R^r{}_{\varphi r\varphi} = -\frac{A'}{rA^3} \quad R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) \tag{197}$$

Todas as componentes que não estejam relacionadas com as componentes escritas acima através de troca de índices são nulas.

As componentes temporal e radial do tensor de Einstein são dadas por

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= R_{tt} - \frac{1}{2}R = \left(R^r{}_{trt} + R^\theta{}_{t\theta t} + R^\varphi{}_{t\varphi t}\right) - \frac{1}{2}\left(R_{tt} + R_{rr} + R_{\theta\theta} + R_{\varphi\varphi}\right) = \\
&= \left(R^r{}_{trt} + R^\theta{}_{t\theta t} + R^\varphi{}_{t\varphi t}\right) - \left(R^r{}_{trt} + R^\theta{}_{t\theta t} + R^\varphi{}_{t\varphi t} + R^\theta{}_{r\theta r} + R^\varphi{}_{r\varphi r} + R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta}\right) = \\
&= -\left(R^\theta{}_{r\theta r} + R^\varphi{}_{r\varphi r} + R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta}\right)
\end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}
G_{rr} &= R_{rr} - \frac{1}{2}R = \left(R^t{}_{rtr} + R^\theta{}_{r\theta r} + R^\varphi{}_{r\varphi r}\right) - \frac{1}{2}\left(R_{tt} + R_{rr} + R_{\theta\theta} + R_{\varphi\varphi}\right) = \\
&= \left(R^t{}_{rtr} + R^\theta{}_{r\theta r} + R^\varphi{}_{r\varphi r}\right) - \left(R^r{}_{trt} + R^\theta{}_{t\theta t} + R^\varphi{}_{t\varphi t} + R^\theta{}_{r\theta r} + R^\varphi{}_{r\varphi r} + R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta}\right) = \\
&= -\left(R^\theta{}_{t\theta t} + R^\varphi{}_{t\varphi t} + R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta}\right)
\end{aligned} \tag{199}$$

Atendendo agora ao facto de que no exterior da estrela (no vácuo) o tensor de energia momento se anula, $T_{\mu\nu}=0$, e que $G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$ tem-se

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= 0 = G_{rr} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{\theta}{}_{r\theta r}+R^{\varphi}{}_{r\varphi r}=R^{\theta}{}_{t\theta t}+R^{\varphi}{}_{t\varphi t} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{2A'}{rA^3}=\frac{2\lambda'}{r\lambda A^2} \quad \Longleftrightarrow \\
-\frac{A'}{A} &= \frac{\lambda'}{\lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad \int\frac{\lambda'}{\lambda}dr=-\int\frac{A'}{A}dr \quad \Longleftrightarrow \quad \int\frac{1}{\lambda}d\lambda=-\int\frac{1}{A}dA \quad \Longleftrightarrow \\
\ln|\lambda| &= -\ln|A|+k \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda=\frac{k'}{A} \qquad (200)
\end{aligned}$$

Podemos fazer $k'=1$ sem perda de generalidade, bastando para tal definir $dt'=k'dt$. Portanto $\lambda(r)=A^{-1}(r)$. Obtemos assim a métrica de Schwarzschild:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -A^{-2}(r)dt^2+A^2(r)dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)= \\
&= -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right) \qquad (201)
\end{aligned}$$

Tendo obtido a componente temporal da métrica, $-e^{2\phi}:=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)$, podemos determinar o campo gravitacional através da expressão $\mathbf{G}=i_1^{-1}\left(-d\phi\right)$:

$$\begin{aligned}
e^{2\phi} &= 1-\frac{2m}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right) \qquad (202) \\
d\phi &= \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dr}\left(1-\frac{2m}{r}\right)}{1-\frac{2m}{r}}dr=\frac{m}{r^2-2mr}dr \qquad (203) \\
\mathbf{G} &= i_1^{-1}\left(-d\phi\right)=i_1^{-1}\left(-\frac{m}{\left(r^2-2mr\right)A}Adr\right)=-\frac{m}{\left(r^2-2mr\right)A}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}= \\
&= -\frac{m}{r^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)A^2}\frac{\partial}{\partial r}=-\frac{m}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (204)
\end{aligned}$$