Mecânica Geométrica

1^aSérie de Problemas

Jorge Rocha, n^o45344

3 de Abril de 2001

1.

A n-esfera é o conjunto $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \quad x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Considere-se a seguinte função de classe C^∞:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ F(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos então escrever S^n como o conjunto dos zeros da aplicação F, isto é,

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \quad F(\mathbf{x}) = 0\} \tag{2}$$

A matriz jacobiana da aplicação F é dada por

$$DF(p) = \begin{bmatrix} 2x_0 & 2x_1 & \ldots & 2x_n \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=p} \tag{3}$$

Num ponto $p \in S^n$ nunca se anulam simultâneamente todas as coordenadas pelo que $rank\ DF = 1 = (n+1) - n$. Deste modo concluímos que S^n é uma variedade diferenciável de classe C^∞ de dimensão n.

Considere-se agora o conjunto $SO(3)$. Pela definição de grupo ortogonal é fácil ver que se $A \in O(3)$ então as suas colunas formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Definimos os vectores constituídos pelas colunas de A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

As relações de ortonormalidade escrevem-se então

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 1 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Seja agora uma função $G : M_{3\times3} \longrightarrow \mathbb{R}^6$, de classe C^∞, definida através de

$$\begin{cases} G_1(A) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - 1 \\ G_2(A) = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - 1 \\ G_3(A) = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - 1 \\ G_4(A) = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \\ G_5(A) = a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ G_6(A) = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \end{cases} \tag{6}$$

Temos portanto verificado que $O(3) = Zeros\ G$. Mas as matrizes de $O(3)$ podem ter determinante igual a $+1$ ou -1 e os elementos de $SO(3)$ satisfazem $\det A = 1$. No entanto, dado $A \in SO(3)$ podemos considerar a vizinhança $\mathcal{V} = \det^{-1}(\mathbb{R}^+)$. Uma vez que a aplicação determinante é contínua e o conjunto $\mathbb{R}^+$ é aberto concluímos que $\mathcal{V}$ é também aberto e portanto é de facto uma vizinhança de A (porque $A \in \mathcal{V}$). Temos que $SO(3) = O(3) \cap \mathcal{V}$ é justamente a componente conexa de $O(3)$ que contém a identidade.

A matriz jacobiana da aplicação G é dada por

$$DG = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Tendo em conta as condições de ortonormalidade (5) concluímos que as linhas da matriz DG são todas ortogonais entre si, logo são linearmente independentes e tem-se $rank\ DG = 6 = 9 - 3$. Portanto $SO(3)$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ de dimensão 3.

2.

De acordo com o enunciado do problema, o caminho γ satisfaz

$$\frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(\gamma(t))]_{t=0} = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

Considere-se agora o caminho $\gamma_{\mathbf{v}}(t) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + t\mathbf{v})$. Usando as propriedades de linearidade do espaço tangente T_pQ temos que $[\gamma_{\mathbf{v}}] = [\gamma_{v^i\mathbf{e}_i}] = v^i[\gamma_{\mathbf{e}_i}] = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Mas γ e $\gamma_{\mathbf{v}}$ pertencem à mesma classe de equivalência:

$$\frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(\gamma_{\mathbf{v}}(t))]_{t=0} = \frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(p) + t\mathbf{v}]_{t=0} = (v^1, \ldots, v^n) = \frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(\gamma(t))]_{t=0} \tag{9}$$

Portanto $[\gamma] = [\gamma_{\mathbf{v}}] = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$.

Seja $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ uma outra carta local com coordenadas $(y^1, \ldots, y^n)$. $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}_{i=1}^n$ é também uma base de T_pQ e portanto podemos escrever $[\gamma] = \xi^j \frac{\partial}{\partial y^j}$. Considerando que $y(x) = (\overline{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(x)$ temos que

$$\begin{aligned} (\xi^1, \ldots, \xi^n) &= \frac{d}{dt}[\overline{\varphi}^{-1}(\gamma(t))]_{t=0} = \frac{d}{dt}[\overline{\varphi}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(\gamma(t))]_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}[y \circ \varphi^{-1}(\gamma(t))]_{t=0} = Dy \cdot \frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(\gamma(t))]_{t=0} = \\ &= \left(v^i \frac{\partial y^1}{\partial x^i}, \ldots, v^i \frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

donde concluímos que $[\gamma] = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$.

3.

Seja $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi \ &: \ \mathcal{U} \longrightarrow S^2 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \ \subset \mathbb{R}^3 \\ \varphi(x,y) &= \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

O conjunto $(\mathcal{U}, \varphi)$ constitui uma carta local para S^2, cobrindo precisamente o hemisfério norte.

A projecção estereográfica em relação ao pólo Sul fornece outra carta local, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$, onde $\overline{\mathcal{U}} = \mathbb{R}^2$ e

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} \ &: \ \overline{\mathcal{U}} = \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \backslash \{(0,0,-1)\} \ \subset \mathbb{R}^3 \\ \overline{\varphi}(x,y) &= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Como é fácil verificar, as cartas satisfazem $\|\varphi(x,y)\| = 1$ e $\varphi(0,0) = (0,0,1)$. As inversas das cartas escrevem-se mais simplesmente:

$$\varphi^{-1}(x,y,z) = (x,y) \tag{13}$$

$$\overline{\varphi}^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \tag{14}$$

Obtemos as componentes do vector $\mathbf{v} = (1,0,0) \in T_{(0,0,1)}S^2$ na carta local $(\mathcal{U}, \varphi)$ fazendo

$$D\left(\varphi^{-1}\right)_{(0,0,1)} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0,1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Do mesmo modo, para a carta local $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$, temos

$$D\left(\overline{\varphi}^{-1}\right)_{(0,0,1)} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+z} & 0 & \frac{-x}{(1+z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1+z} & \frac{-y}{(1+z)^2} \end{bmatrix}_{(0,0,1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Fazendo uso do problema **2.** podemos determinar as componentes do vector $\mathbf{v}$ na carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ a partir das componentes de $\mathbf{v}$ na carta $(\mathcal{U}, \varphi)$. Com esse fim construímos a função de transição $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (\overline{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(x,y) = \overline{\varphi}^{-1}\left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right) = \\ &= \left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

A matriz jacobiana, no ponto $(0,0)$, é igual a

$$(DF)_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Aplicando então a fórmula obtida no exercício anterior, em que (x^1, x^2) são coordenadas na carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ e (y^1, y^2) são coordenadas na carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 1\frac{\partial}{\partial x^1} + 0\frac{\partial}{\partial x^2} = \left(1\frac{\partial F^1}{\partial x^1} + 0\frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial y^1} + \left(1\frac{\partial F^2}{\partial x^1} + 0\frac{\partial F^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial y^2} = \\ &= \left(1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0\right)\frac{\partial}{\partial y^1} + \left(1 \times 0 + 0 \times \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^1} + 0\frac{\partial}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{19}$$

resultado idêntico ao que obtivemos anteriormente.

4.

Em primeiro lugar mostremos que $[X,Y]$ define em cada ponto $p \in Q$ uma derivação:
$[X,Y] \cdot (\alpha f + \beta g)(p) =$

$$\begin{aligned} &= X_p \cdot (Y \cdot (\alpha f + \beta g)) - Y_p \cdot (X \cdot (\alpha f + \beta g)) \\ &= X_p \cdot (\alpha Y \cdot f + \beta Y \cdot g) - Y_p \cdot (\alpha X \cdot f + \beta X \cdot g) \\ &= \alpha X_p \cdot (Y \cdot f) + \beta X_p \cdot (Y \cdot g) - \alpha Y_p \cdot (X \cdot f) - \beta Y_p \cdot (X \cdot g) \\ &= \alpha\{X_p \cdot (Y \cdot f) - Y_p \cdot (X \cdot f)\} + \beta\{X_p \cdot (Y \cdot g) - Y_p \cdot (X \cdot g)\} \\ &= \alpha[X,Y] \cdot f(p) + \beta[X,Y] \cdot g(p) \end{aligned} \tag{20}$$

$[X,Y] \cdot (fg)\,(p) =$

$$\begin{aligned} &= X_p \cdot (Y \cdot (fg)) - Y_p \cdot (X \cdot (fg)) \\ &= X_p \cdot (fY \cdot g + gY \cdot f) - Y_p \cdot (fX \cdot g + gX \cdot f) \\ &= f(p)X_p \cdot (Y \cdot g) + g(p)X_p \cdot (Y \cdot f) - f(p)Y_p \cdot (X \cdot g) - g(p)Y_p \cdot (X \cdot f) \\ &= f(p)\{X_p \cdot (Y \cdot g) - Y_p \cdot (X \cdot g)\} + g(p)\{X_p \cdot (Y \cdot f) - Y_p \cdot (X \cdot f)\} \\ &= f(p)([X,Y] \cdot g)(p) + g(p)([X,Y] \cdot f)(p) \end{aligned} \tag{21}$$

A expressão para $[X, Y]$ em coordenadas obtém-se fazendo

$$\begin{aligned}
[X,Y]\cdot f &= X\cdot(Y\cdot f) - Y\cdot(X\cdot f) = \\
&= X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \\
&= X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^j Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \\
&= \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{22}$$

donde se conclui que $[X, Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$.

5.

Pretende-se calcular o *pull-back* da forma de volume $dx \wedge dy \wedge dz$ em $\mathbb{R}^3$ pela função

$$\begin{aligned}
f \quad &: \quad]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(x,y,z) \quad &= \quad f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)
\end{aligned} \tag{23}$$

Usando as propriedades do *pull-back* e da derivada exterior temos
$f^*(dx \wedge dy \wedge dz) =$

$$\begin{aligned}
&= f^*dx \wedge f^*dy \wedge f^*dz = d(f^*x) \wedge d(f^*y) \wedge d(f^*z) \\
&= d(r\sin\theta\cos\varphi) \wedge d(r\sin\theta\sin\varphi) \wedge d(r\cos\theta) \\
&= (\sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi) \wedge \\
&\quad \wedge(\sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi) \wedge \\
&\quad \wedge(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \\
&= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi\, d\theta\wedge d\varphi\wedge dr - r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi\, d\varphi\wedge d\theta\wedge dr - \\
&\quad - r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi\, dr\wedge d\varphi\wedge d\theta + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi\, d\varphi\wedge dr\wedge d\theta \\
&= r^2[\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \\
&\quad + \sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi]\, dr\wedge d\theta\wedge d\varphi \\
&= r^2[\cos^2\theta\sin\theta + \sin^2\theta\sin\theta]\, dr\wedge d\theta\wedge d\varphi \\
&= r^2\sin\theta\, dr\wedge d\theta\wedge d\varphi
\end{aligned} \tag{24}$$

6.

Seja Q uma variedade de dimensão n. O fibrado cotangente T^*Q será então uma variedade com dimensão $2n$. Seja $p \in \Gamma^1(Q)$ uma qualquer 1-forma em Q. Em coordenadas locais podemos escrever

$$p = p_i\, dx^i \tag{25}$$

Usando a projecção canónica, $\pi : T^*Q \longrightarrow Q$, podemos definir uma 1-forma no fibrado cotangente T^*Q por *pull-back*:

$$\lambda_p = \pi^* p = \pi^*\left(p_i\, dx^i\right) = \pi^* p_i \,.\pi^*(dx^i) \tag{26}$$

Se $v \in T_{p_q}(T^*Q)$, então

$$\lambda_p(v) = p_i(q)(dx^i)_q(\pi_* v) \tag{27}$$

Obtemos uma 2-forma canónica ω em T^*Q aplicando a derivada exterior:

$$\omega = d\lambda = d\left(p_i dx^i\right) = dp_i \wedge dx^i \tag{28}$$

e obtemos uma forma de rank máximo (neste caso, $2n$) através de

$$\begin{aligned}\nu &= \omega \wedge \ldots \wedge \omega = dp_{i_1} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dp_{i_n} \wedge dx^{i_n} = \\ &= n!\, dp_1 \wedge dx^1 \wedge dp_2 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dx^n\end{aligned} \tag{29}$$

Em particular,

$$\nu\left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = n! \neq 0 \tag{30}$$

pelo que ν é uma 2n-forma em T^*Q que nunca se anula, ou seja, ν é uma forma de volume. Assim concluímos que T^*Q é uma variedade orientável, independentemente da orientabilidade ou não de Q.

7.

Seja $\psi :]0,\pi[\times]0,2\pi[\longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma carta para S^2 definida por

$$\psi(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{31}$$

A forma $\omega = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$ nunca se anula no domínio de ψ, onde está definida. Nesse conjunto, ω define uma forma de volume. A forma ω satisfaz

$$\omega_{(\theta,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \sin\theta \tag{32}$$

portanto, para $\theta \neq 0, \pi$,

$$\lim_{\varphi\longrightarrow 0} \omega_{(\theta,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \lim_{\varphi\longrightarrow 2\pi} \omega_{(\theta,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \sin\theta \neq 0 \tag{33}$$

Por outro lado

$$\lim_{\theta\longrightarrow 0} \omega_{(\theta,\varphi)}\left(\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \lim_{\theta\longrightarrow\pi} \omega_{(\theta,\varphi)}\left(\frac{1}{\theta-\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = 1 \neq 0 \tag{34}$$

Sendo assim, ω define por continuidade uma forma que nunca se anula, ou seja, ω define uma forma de volume em S^2 por continuidade.

Seja $\mathcal{U} =]0,\pi[\times]0,2\pi[$. O conjunto $S^2 \backslash \psi(\mathcal{U})$ tem medida nula (é o meridiano $\varphi = 0$). Logo

$$\int_{S^2} \omega = \int_{\psi(\mathcal{U})} \omega = \int_{\mathcal{U}} \psi^*\omega = \int_{\mathcal{U}} \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi \tag{35}$$

8.

Considere-se a forma $\omega = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$ do problema anterior. Esta forma é fechada:

$$d\omega = \cos\theta\, d\theta \wedge d\theta \wedge d\varphi + 0\, d\varphi \wedge d\theta \wedge d\varphi = 0 \tag{36}$$

Suponhamos que ω é exacta: $\omega = d\eta$. Então, atendendo a que S^2 é uma variedade sem bordo, temos pelo teorema de Stokes

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2} d\eta = \int_{\partial S^2} \eta = \int_{\varnothing} \eta = 0 \tag{37}$$

Mas, como vimos anteriormente, $\int_{S^2} \omega = 4\pi$ pelo que ω não pode ser exacta. Portanto, ω é uma forma fechada mas não exacta em S^2.

9.

(a) Seja M uma variedade de dimensão m e ω uma 2-forma fechada e não degenerada. Em coordenadas locais podemos escrever ω e um qualquer campo vectorial sobre a variedade simplética da seguinte maneira

$$\omega = \omega_{jk}\, dx^j \wedge dx^k \tag{38}$$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{39}$$

A contracção escreve-se então

$$\begin{aligned} X\rfloor\omega &= \omega(X,\cdot) = \omega_{jk}(dx^j \otimes dx^k - dx^k \otimes dx^j)\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\cdot\right) = \omega_{jk}\left[X^j dx^k(\cdot) - X^k dx^j(\cdot)\right] = \\ &= (\omega_{jk} - \omega_{kj})X^j dx^k \end{aligned} \tag{40}$$

Seja Ω a matriz antissimétrica definida por $(\Omega)_{ij} = \omega_{ji} - \omega_{ij}$. A expressão obtida acima indica que a bijecção

$$T_pM \ni X_p \longmapsto X_p\rfloor\omega_p \in T_p^*M \tag{41}$$

é dada exactamente pela matriz Ω que, sendo antissimétrica, satisfaz

$$\Omega^T = -\Omega \tag{42}$$

Aplicando o determinante a ambos os membros da equação (42) obtemos

$$\det\Omega = \det\Omega^T = \det(-\Omega) = (-1)^m \det\Omega \tag{43}$$

Por definição, para a 2-forma ω ser não-degenerada a aplicação (41) tem que ser uma bijecção, ou seja, o núcleo da matriz Ω tem que ser trivial. Portanto $\det\Omega \neq 0$ e assim a expressão (43) reduz-se a

$$(-1)^m = 1 \tag{44}$$

o que implica que $m = 2n$ seja um número par para que (M,ω) seja uma variedade simplética.

(b) Seja então (M,ω) uma variedade simplética com $\dim M = 2n$. ω é uma 2-forma pelo que $\omega \wedge \ldots \wedge \omega \in \Gamma^{2n}(M)$ é uma forma de rank máximo. Sendo ω não degenerada, isto significa que a aplicação $T_pM \ni X_p \to X_p\rfloor\omega_p \in T_p^*M$ tem núcleo trivial e portanto a matriz da forma bilinear que ω define é não singular (equivalentemente, $\det\Omega \neq 0$).

Comecemos por notar que $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\Omega_{ji}$:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j - \frac{1}{2}\omega_{ij} dx^j \wedge dx^i = \\ &= \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\Omega_{ji}\, dx^i \wedge dx^j \end{aligned} \tag{45}$$

Sendo P o conjunto das permutações de $2n$ elementos e $sgn(\sigma)$ o sinal da permutação σ, em coordenadas tem-se

$$\begin{aligned} \omega \wedge \cdots \wedge \omega &= \sum_{\sigma\in P} \omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots \omega_{\sigma(2n-1)}\omega_{\sigma(2n)}\; dx^{\sigma(1)} \wedge dx^{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(2n)} = \\ &= \sum_{\sigma\in P} sgn(\sigma)\; \omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots \omega_{\sigma(2n-1)}\omega_{\sigma(2n)}\; dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} = \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\sigma\in P} sgn(\sigma)\; \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots \Omega_{\sigma(2n-1)}\omega_{\sigma(2n)}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} \end{aligned} \tag{46}$$

Atendendo a que a matriz Ω é antissimétrica tem-se o seguinte resultado:

$$\left(\sum_{\sigma\in P} sgn(\sigma)\; \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots \Omega_{\sigma(2n-1)}\omega_{\sigma(2n)}\right)^2 = (2 \times n!)^2 \det\Omega \tag{47}$$

Substituindo a expressão (47) em (46) obtem-se

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega = \frac{n!}{2^{n-1}}\sqrt{\det\Omega}\; dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} \tag{48}$$

Uma vez que $\det \Omega \neq 0$ concluímos que $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ nunca se anula e portanto é uma forma de volume.

(c) Se Q é uma variedade com $\dim Q = n$, T^*Q é uma variedade com $\dim T^*Q = 2n$, ou seja, de dimensão par. No problema **6.** construímos a 2-forma $d\lambda$ que verificámos que era não degenerada. Para além disso, $d\lambda$ é obviamente fechada (porque $d^2 = 0$). Logo $(T^*Q, d\lambda)$ é uma variedade simplética.

(d) Sendo X_H o campo hamiltoniano gerado por $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$X_H \rfloor \omega = -dH$$

temos (usando a fórmula de Cartan e tendo em conta que ω é fechada) que

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = X_H \rfloor d\omega + d(X_H \rfloor \omega) = X_H \rfloor 0 + d(-dH) = -d^2 H = 0$$

(e) Seja X um campo vectorial em Q tal que $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Então, pela fórmula de Cartan,

$$d(X \rfloor \omega) = -X \rfloor d\omega = -X_H \rfloor 0 = 0$$

Portanto $X \rfloor \omega \in \Gamma^1(Q)$ é uma 1-forma fechada. Então pelo lema de Poicaré $X \rfloor \omega$ é localmente exacta, isto é, $\forall p \in Q$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de p e uma 0-forma (ou seja, uma função) $f \in C^\infty(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ tal que $X \rfloor \omega = df$. Fazendo $H = -f$ temos provado X é localmente um campo hamiltoniano.