Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria II

1º Teste - 29 de Abril de 2004 - 14h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Identificamos cada ponto do conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

com a aplicação afim invertível $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = yt + x$. Note que o conjunto destas aplicações com a operação de composição é um grupo, pelo que a nossa identificação induz um estrutura de grupo em H.

(3 val.) (a) Mostre que a operação de grupo induzida em H é dada por

$$(x, y) \cdot (z, w) = (yz + x, yw),$$

e que H com esta estrutura de grupo é um grupo de Lie.

(3 val.) (b) Mostre que a derivada da translacção esquerda $L_{(x,y)} : H \to H$ no ponto $(z, w) \in H$ é representada nas coordenadas acima pela matriz

$$\left(dL_{(x,y)}\right)_{(z,w)} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Conclua que o campo invariante à esquerda determinado pelo vector

$$V = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{h} \equiv T_{(0,1)}H$$

($\xi, \eta \in \mathbb{R}$) é o campo

$$X^V = \xi y \frac{\partial}{\partial x} + \eta y \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{X}(H).$$

(2 val.) (c) Dados $V, W \in \mathfrak{h}$, calcule $[V, W]$.

(3 val.) (d) Calcule o fluxo do campo X^V, e indique uma expressão para a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{h} \to H$.

2. Seja $f : S^n \to S^n$ a aplicação antípoda. Recorde que o espaço projectivo n-dimensional é a variedade $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$, onde o grupo $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ age em S^n mediante $1 \cdot x = x$, $(-1) \cdot x = f(x)$. Seja $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ a projecção natural.

(3 val.) (a) Mostre que $\omega \in \Omega^k(S^n)$ é da forma $\omega = \pi^*\theta$ para $\theta \in \Omega^k(\mathbb{R}P^n)$ *sse* $f^*\omega = \omega$.

(3 val.) (b) Mostre que $\mathbb{R}P^n$ é orientável *sse* n é ímpar.

(3 val.) (c) Mostre que se $\mathbb{R}P^n$ é orientável e $\theta \in \Omega^n(\mathbb{R}P^n)$ então

$$\int_{S^n} \pi^*\theta = 2 \int_{\mathbb{R}P^n} \theta.$$